# O preço da bebedeira ou a bebedeira do preço?

Imagine o bêbado que vai até um bar e é expulso, na porta, pela proprietária. Depois de vagar pela rua por uma hora, o bêbado volta ao bar e a mesma proprietária o expulsa. :neutral: Então vaga por mais de duas horas e acaba retornando ao mesmo bar; a proprietária, pela terceira vez, o expulsa. :roll: O bêbado então retruca a ela: “Você possui todos os bares desta rua?” :lol: A trajetória do bêbado é chamada de caminho aleatório, pois, como quem já experimentou a vida boêmia sabe ( :wink: ), na bebedeira não dá para caminhar de outra forma senão ao léu. :smile: Mas aqui não falarei sobre a vida noturna ( :sad: ), mas sobre como os preços de ativos financeiros se parecem com bêbados caminhando; ou sobre como os bêbados caminhando lembram os preços de ativos financeiros ao longo de sua evolução temporal. :smile:

O modelo de Bachelier (1900) para o movimento Browniano foi a primeira proposta da dinâmica do preço de um ativo financeiro. Para entendermos o modelo que Bachelier propôs em 1900 para a dinâmica do preço de um ativo financeiro, inicialmente estudamos o movimento aleatório em uma dimensão e depois tomamos seu limite contínuo, definindo o movimento Browniano unidimensional.

## Movimento aleatório em uma dimensão

As considerações a seguir são baseadas no livro "Mathematical Models of Financial Derivatives", de Yue-Kuen Kwok. Imagine uma partícula pontual que possa mover-se apenas ao longo do eixo $x$, com passos de tamanho $\delta$ fixo, em ambos os sentidos do eixo $x$. Suponhamos ainda que a partícula comece na origem e, a cada passo, tenha probabilidade $p$ de dar um passo no sentido positivo, mudando sua posição de $+\delta$, e tenha probabilidade $q$, com $p+q=1$, de dar um passo no sentido negativo, mudando sua posição de $-\delta$. Assim, cada passo da partícula independe de seus passos anteriores, já que as probabilidades $p$ e $q$ são sempre as mesmas. O valor esperado do deslocamento $x_i$ do $i$-ésimo passo é, portanto,

$$\begin{aligned} E\left(x_i\right) &= p\delta + q\left(-\delta\right) \\ &= \left(p-q\right)\delta, \end{aligned}$$

independentemente de $i$. Após $n$ passos, a partícula tem a posição $X_n$ dada pela soma de todos os $n$ deslocamentos:

$$X_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n.$$

Logo, como os passos são todos independentes, o valor esperado da posição da partícula após $n$ passos é:

$$E\left(X_n\right) = E\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^{n} E\left(x_i\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} (p-q)\,\delta \\
&= n\,(p-q)\,\delta.
\end{aligned}$$

A variância de $X_n$ é, por definição, dada por:

$$\begin{aligned}
\operatorname{var}\left(X_n\right) &= E\left\{\left[X_n - E\left(X_n\right)\right]^2\right\} \\
&= E\left\{X_n^2 - 2X_n E\left(X_n\right) + \left[E\left(X_n\right)\right]^2\right\} \\
&= E\left(X_n^2\right) + E\left[-2X_n E\left(X_n\right)\right] + E\left\{\left[E\left(X_n\right)\right]^2\right\} \\
&= E\left(X_n^2\right) - 2E\left(X_n\right)E\left(X_n\right) + \left[E\left(X_n\right)\right]^2 \\
&= E\left(X_n^2\right) - \left[E\left(X_n\right)\right]^2.
\end{aligned}$$

Já calculamos $E\left(X_n\right)$. Calculemos agora:

$$\begin{aligned}
E\left(X_n^2\right) &= E\left[\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2\right] \\
&= E\left[\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} x_j\right)\right] \\
&= E\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i x_j\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} E\left(x_i x_j\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} E\left(x_i^2\right) + 2\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} E\left(x_i x_j\right).
\end{aligned}$$

Como os passos são todos independentes,

$$\begin{aligned}
E\left(x_i x_j\right) &= E\left(x_i\right)E\left(x_j\right) \\
&= \left[(p-q)\,\delta\right]^2.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} E\left(x_i x_j\right) = \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} \left[(p-q)\,\delta\right]^2$$

$$
\begin{aligned}
&= [(p-q)\,\delta]^2 \sum_{i=1}^{n-1} (n-i) \\
&= [(p-q)\,\delta]^2 \left[ n\,(n-1) - \sum_{i=1}^{n-1} i \right] \\
&= [(p-q)\,\delta]^2 \left[ n\,(n-1) - \frac{(n-1)\,n}{2} \right] \\
&= [(p-q)\,\delta]^2 \,(n-1) \left[ n - \frac{n}{2} \right] \\
&= [(p-q)\,\delta]^2 \,\frac{(n-1)\,n}{2},
\end{aligned}
$$

onde utilizamos

$$
\sum_{i=1}^{n-1} i = \frac{(n-1)\,n}{2}.
$$

Resta-nos calcular:

$$
\begin{aligned}
E\left(x_i^2\right) &= p\delta^2 + q\delta^2 \\
&= \delta^2,
\end{aligned}
$$

pois

$$
p + q = 1.
$$

Assim,

$$
\begin{aligned}
\operatorname{var}(X_n) &= \sum_{i=1}^{n} E\left(x_i^2\right) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} E\left(x_i x_j\right) - \left[E\left(X_n\right)\right]^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n} \delta^2 + 2\,[(p-q)\,\delta]^2 \,\frac{(n-1)\,n}{2} - [n\,(p-q)\,\delta]^2 \\
&= n\delta^2 + (n-1)\,n\,[(p-q)\,\delta]^2 - n^2\,[(p-q)\,\delta]^2 \\
&= n\delta^2 - n\,[(p-q)\,\delta]^2 \\
&= n\delta^2 - n\left(p^2 - 2pq + q^2\right)\delta^2 \\
&= n\delta^2\left(1 - p^2 - q^2 + 2pq\right).
\end{aligned}
$$

Como $p + q = 1$, segue que

$$
\begin{aligned}
p^2 + 2pq + q^2 &= (p+q)^2 \\
&= 1
\end{aligned}
$$

e, portanto,

$$
1 - p^2 - q^2 = 2pq.
$$

Logo,

$$
\operatorname{var}(X_n) = 4pqn\delta^2.
$$

## Limite contínuo do movimento aleatório

Aqui calculamos o que acontece quando $\delta \to 0$, ou seja, a partícula pode mover-se continuamente e, em cada passo infinitesimal, ainda tem probabilidade $p$ de deslocar-se $+\delta$ e probabilidade $q$ de deslocar-se $-\delta$. Seja $u(x,t)$ a probabilidade de que a partícula esteja na posição $x$ no instante $t$. Suponhamos que a partícula dê $r$ passos por unidade de tempo. Assim, o intervalo de tempo entre dois passos é dado por

$$\lambda = \frac{1}{r}$$

e, portanto, no limite contínuo, isto é, quando $\delta \to 0$, teremos $r \to \infty$ e $\lambda \to 0$. Antes de tomarmos o limite, podemos dizer que o número de passos no instante $t$ é dado por

$$n = rt,$$

ou ainda, podemos dizer que o instante de tempo $t$ é dado por

$$t = n\lambda.$$

Com isso, podemos dizer também que, depois de $n$ passos, a partícula tem probabilidade $u(x,t)$ de encontrar-se em $x = X_n$, no instante $t$. No próximo passo, que ocorre no instante $t+\lambda$, a probabilidade de a partícula encontrar-se em $x$ é dada por

$$u(x,t+\lambda) = pu(x-\delta,t) + qu(x+\delta,t).$$

Para entendermos essa equação, basta pensarmos que, para a partícula estar em $x$ no instante $t+\lambda$, pode ter vindo da posição $x-\delta$, dando um passo no sentido positivo do eixo $x$, deslocando-se de $+\delta$, ou pode ter vindo de $x+\delta$, deslocando-se de $-\delta$. No primeiro caso, a probabilidade de a partícula estar em $x-\delta$ no instante $t$, anterior a $t+\lambda$, é $u(x-\delta,t)$ e a probabilidade de deslocar-se $+\delta$ é $p$. Logo, a probabilidade de que a partícula tenha vindo da posição $x-\delta$ é o produto $pu(x-\delta,t)$, já que para dar um passo no sentido positivo e parar em $x$, a partícula precisa, antes, ter estado em $x-\delta$. Analogamente, $qu(x+\delta,t)$ é a probabilidade de a partícula ter vindo da posição $x+\delta$. Como, em $t+\lambda$, a partícula pode ter vindo de $x-\delta$ ***ou*** de $x+\delta$, segue que a probabilidade de estar em $x$ é a soma de $pu(x-\delta,t)$ com $qu(x+\delta,t)$. Como temos em mente tomar o limite contínuo fazendo $\delta \to 0$ e $\lambda \to 0$, podemos expandir a equação acima em série de Taylor para as variáveis $\delta$ e $\lambda$:

$$u(x,t+\lambda) = u(x,t) + \lambda\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + O\left(\lambda^2\right),$$

$$u(x-\delta,t) = u(x,t) - \delta\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} + \frac{\delta^2}{2}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - O\left(\delta^3\right)$$

e

$$u(x+\delta,t) = u(x,t)+\delta\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}+\frac{\delta^2}{2}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}+O\left(\delta^3\right).$$

Substituindo essas três expansões na equação

$$u(x,t+\lambda) = pu(x-\delta,t)+qu(x+\delta,t),$$

obtemos

$$\begin{aligned} u(x,t)+\lambda\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}+O\left(\lambda^2\right) &= pu(x,t)-p\delta\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}+p\frac{\delta^2}{2}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}-O\left(p\delta^3\right) \\ &+ qu(x,t)+q\delta\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}+q\frac{\delta^2}{2}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}+O\left(q\delta^3\right), \end{aligned}$$

isto é,

$$\lambda\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}+O\left(\lambda^2\right) = (q-p)\,\delta\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}+\frac{\delta^2}{2}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}+O\left[(q-p)\,\delta^3\right].$$

Dividindo tudo por $\lambda$, ficamos com

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}+O(\lambda) = \left[(q-p)\frac{\delta}{\lambda}\right]\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\delta^2}{\lambda}\right)\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}+O\left[(q-p)\frac{\delta^3}{\lambda}\right].$$

Quando $\delta \to 0$, sabemos que $\lambda \to 0$ também, mas ainda não explicitamos uma dependência de $\lambda$ com $\delta$. Também ainda não estabelecemos os valores de

$$(q-p)\frac{\delta}{\lambda},$$

$$\frac{\delta^2}{\lambda}$$

e

$$(q-p)\frac{\delta^3}{\lambda}$$

quando $\delta \to 0$. Para solucionarmos essas indeterminações, seja $\mu$ o valor esperado do deslocamento da partícula por unidade de tempo. Assim, segue de

$$E(X_n) = n(p-q)\,\delta$$

que

$$\begin{aligned} \mu &= r(p-q)\,\delta \\ &= (p-q)\frac{\delta}{\lambda}. \end{aligned}$$

Como

$$p+q = 1,$$

podemos escrever:

$$\mu = (p-q)\frac{\delta}{\lambda} = (p-1+p)\frac{\delta}{\lambda},$$

isto é,

$$2p-1 = \mu\frac{\lambda}{\delta},$$

ou seja,

$$p = \frac{1}{2}+\frac{\mu\lambda}{2\delta}.$$

Então,

$$q = 1-p = \frac{1}{2}-\frac{\mu\lambda}{2\delta}.$$

Veja que como $\lambda$ é uma função de $\delta$, segue que $p$ e $q$ também devem ser funções de $\delta$. Também definamos $\sigma^2$ como a variância do deslocamento da partícula por unidade de tempo. Portanto, segue de

$$\text{var}\,(X_n) = 4pqn\delta^2$$

que

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= 4pqr\delta^2\\ &= 4pq\frac{\delta^2}{\lambda}.\end{aligned}$$

Logo, uma vez que já isolamos $p$ e $q$ em termos de $\mu$, $\lambda$ e $\delta$, podemos expressar a variância por unidade de tempo como

$$\sigma^2 = 4pq\frac{\delta^2}{\lambda} = 4\left(\frac{1}{2}+\frac{\mu\lambda}{2\delta}\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{\mu\lambda}{2\delta}\right)\frac{\delta^2}{\lambda},$$

isto é,

$$\sigma^2 = 4\left(\frac{1}{4}-\frac{\mu^2\lambda^2}{4\delta^2}\right)\frac{\delta^2}{\lambda} = \frac{\delta^2}{\lambda}-\mu^2\lambda.$$

Nossa intenção é caracterizar o movimento aleatório contínuo pelos parâmetros finitos $\mu$ e $\sigma^2$ apenas. Isso faz algum sentido? :???: Sim! Vamos tomar $p$ e $q$ como funções de $\delta$, mas tais que sempre satisfazem o vínculo $p+q=1$, para todo valor de $\delta$. Também vamos tomar $\mu$ e $\sigma^2$ como constantes fixas. Então, porque

$$p = \frac{1}{2}+\frac{\mu\lambda}{2\delta},$$

fica claro que podemos escrever

$$\lambda = \frac{2p-1}{\mu}\delta,$$

supondo que

$$p \neq \frac{1}{2}$$

e, portanto,

$$\mu \neq 0.$$

Vemos que, nesse caso, quando $\delta$ tender a zero, então $\lambda$ tenderá a zero também. Note que, porque $p$ é uma função ainda indeterminada de $\delta$, $\lambda$ não depende linearmente de $\delta$, embora seja proporcional a $\delta$. No caso particular em que

$$p = q = \frac{1}{2},$$

segue que

$$\mu = 0$$

e o quociente entre $\lambda$ e $\delta$ pode ser qualquer número ou função de $\delta$, digamos, $\alpha$ :

$$\frac{\lambda}{\delta} = \alpha = \alpha(\delta).$$

Agora vejamos a variância por unidade de tempo, $\sigma^2$. Como

$$\sigma^2 = \frac{\delta^2}{\lambda} - \mu^2\lambda,$$

obtemos

$$\frac{\delta^2}{\lambda} = \sigma^2 + \mu^2\lambda.$$

Impondo que $\sigma^2$ seja finita, vemos que no limite em que $\delta \to 0$ segue

$$\frac{\delta^2}{\lambda} \to \sigma^2,$$

com $\mu$ nulo ou não, já que se $\mu \neq 0$ segue que $\lambda \to 0$ quando $\delta \to 0$. Em particular, quando $\mu = 0$, segue que

$$\lambda = \frac{\delta^2}{\sigma^2},$$

implicando que, nesse caso,

$$\alpha(\delta) = \frac{\delta}{\sigma^2}.$$

Outra maneira de ver que $\delta^2/\lambda$ tende a $\sigma^2$, quando $\delta$ se aproxima de zero, é notar que podemos usar a relação que define $\sigma^2$, isto é,

$$\sigma^2 = 4pq\frac{\delta^2}{\lambda},$$

e calcular o limite

$$\lim_{\delta\to 0}\frac{\delta^2}{\lambda} = \lim_{\delta\to 0}\frac{\sigma^2}{4pq} = \frac{\sigma^2}{4\lim_{\delta\to 0}(pq)}.$$

Mas,

$$\sigma^2 = 4pq\frac{\delta^2}{\lambda} = 4p(1-p)\frac{\delta^2}{\lambda} = 4\left(p-p^2\right)\delta\frac{\delta}{\lambda} = 4\left(p-p^2\right)\delta\frac{\mu}{2p-1},$$

onde usei a relação

$$\mu = (p-q)\frac{\delta}{\lambda} = (p-1+p)\frac{\delta}{\lambda} = (2p-1)\frac{\delta}{\lambda},$$

isto é,

$$\frac{\delta}{\lambda} = \frac{\mu}{2p-1}.$$

Sem perda de generalidade, para simplificar os cálculos, vou supor que

$$\mu > 0.$$

Assim, temos uma equação de segundo grau em $p$ para resolver:

$$(2p-1)\frac{\sigma^2}{4\delta\mu} = p-p^2,$$

isto é,

$$p^2 - p + (2p-1)\frac{\sigma^2}{4\delta\mu} = 0,$$

ou seja,

$$p^2 - \left(1-\frac{\sigma^2}{2\delta\mu}\right)p - \frac{\sigma^2}{4\delta\mu} = 0,$$

cujas possíveis soluções são

$$p = \frac{1}{2} - \frac{\sigma^2}{4\delta\mu} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\left(1-\frac{\sigma^2}{2\delta\mu}\right)^2 + \frac{\sigma^2}{\delta\mu}},$$

que pode também ser escrita como

$$p = \frac{1}{2} - \frac{\sigma^2}{4\delta\mu} \pm \frac{1}{2}\sqrt{1-\frac{\sigma^2}{\delta\mu} + \left(\frac{\sigma^2}{2\delta\mu}\right)^2 + \frac{\sigma^2}{\delta\mu}} = \frac{1}{2} - \frac{\sigma^2}{4\delta\mu} \pm \frac{1}{2}\sqrt{1+\left(\frac{\sigma^2}{2\delta\mu}\right)^2}.$$

Veja que a solução com o sinal de menos antes da raiz quadrada não faz sentido quando $\delta$ se aproxima de zero e, portanto, escolhemos

$$p = \frac{1}{2} - \frac{\sigma^2}{4\delta\mu} + \frac{1}{2}\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma^2}{2\delta\mu}\right)^2}.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\lim_{\delta\to 0}(pq) &= \lim_{\delta\to 0}\left[p\left(1-p\right)\right] \\
&= \lim_{\delta\to 0}\left\{\left[\frac{1}{2} - \frac{\sigma^2}{4\delta\mu} + \frac{1}{2}\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma^2}{2\delta\mu}\right)^2}\right]\left[\frac{1}{2} + \frac{\sigma^2}{4\delta\mu} - \frac{1}{2}\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma^2}{2\delta\mu}\right)^2}\right]\right\},
\end{aligned}$$

isto é,

$$\lim_{\delta\to 0}(pq) = \lim_{\delta\to 0}\left\{\frac{1}{4} - \left[\frac{\sigma^2}{4\delta\mu} - \frac{1}{2}\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma^2}{2\delta\mu}\right)^2}\right]^2\right\},$$

ou seja,

$$\lim_{\delta\to 0}(pq) = \lim_{\delta\to 0}\left\{\frac{1}{4} - \left(\frac{\sigma^2}{4\delta\mu}\right)^2 + \frac{\sigma^2}{4\delta\mu}\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma^2}{2\delta\mu}\right)^2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(\frac{\sigma^2}{2\delta\mu}\right)^2\right\},$$

ou ainda,

$$\lim_{\delta\to 0}(pq) = \lim_{\delta\to 0}\left\{-\frac{1}{8}\left(\frac{\sigma^2}{\delta\mu}\right)^2 + \frac{\sigma^2}{4\delta\mu}\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma^2}{2\delta\mu}\right)^2}\right\}.$$

Note que podemos escrever

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma^2}{2\delta\mu}\right)^2} = \frac{\sigma^2}{2\delta\mu}\sqrt{1 + \left(\frac{2\delta\mu}{\sigma^2}\right)^2} \approx \frac{\sigma^2}{2\delta\mu}\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{2\delta\mu}{\sigma^2}\right)^2\right],$$

no limite em que $\delta$ se aproxima de zero. Com isso,

$$\lim_{\delta\to 0}(pq) = \lim_{\delta\to 0}\left\{-\frac{1}{8}\left(\frac{\sigma^2}{\delta\mu}\right)^2 + \frac{\sigma^2}{4\delta\mu}\frac{\sigma^2}{2\delta\mu}\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{2\delta\mu}{\sigma^2}\right)^2\right]\right\},$$

isto é,

$$\lim_{\delta\to 0}(pq) = \lim_{\delta\to 0}\left[-\frac{1}{8}\left(\frac{\sigma^2}{\delta\mu}\right)^2 + \frac{1}{8}\left(\frac{\sigma^2}{\delta\mu}\right)^2 + \frac{1}{16}\left(\frac{\sigma^2}{\delta\mu}\right)^2\left(\frac{2\delta\mu}{\sigma^2}\right)^2\right],$$

ou seja,

$$\lim_{\delta\to 0}(pq) = \lim_{\delta\to 0}\left[\frac{1}{16}\left(\frac{\sigma^2}{\delta\mu}\right)^2\left(\frac{2\delta\mu}{\sigma^2}\right)^2\right] = \frac{1}{4}.$$

Logo,

$$\lim_{\delta\to 0}\frac{\delta^2}{\lambda} = \lim_{\delta\to 0}\frac{\sigma^2}{4pq} = \frac{\sigma^2}{4\lim_{\delta\to 0}(pq)} = \sigma^2,$$

como esperado.

Dessa forma, a equação que descreve a distribuição de probabilidade $u(x,t)$,

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + O(\lambda) = \left[(q-p)\frac{\delta}{\lambda}\right]\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\delta^2}{\lambda}\right)\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + O\left[(q-p)\frac{\delta^3}{\lambda}\right],$$

pode ser reescrita como

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + O(\lambda) = \mu\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\delta^2}{\lambda}\right)\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + O\left[\mu\delta^2\right].$$

Essa equação, no limite em que $\delta \to 0$ e $\lambda \to 0$, fica assim:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + \lim_{\delta\to 0}O(\lambda) = \mu\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} + \frac{1}{2}\left[\lim_{\delta\to 0}\left(\frac{\delta^2}{\lambda}\right)\right]\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + \lim_{\delta\to 0}O\left[\mu\delta^2\right].$$

Como vimos,

$$\lim_{\delta\to 0}\left(\frac{\delta^2}{\lambda}\right) = \sigma^2$$

e, obviamente,

$$\lim_{\delta\to 0}O(\lambda) = 0$$

e

$$\lim_{\delta\to 0}O\left[\mu\delta^2\right] = 0.$$

Com esses limites, a equação para a probabilidade $u(x,t)$ fica, finalmente,

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + \mu\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} - \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = 0.$$

Essa é a equação de Kolmogorov avançada ou equação de Fokker-Planck.

É fácil ( :wink: ) verificar que a solução para essa equação é dada pela distribuição gaussiana:

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}}\exp\left[-\frac{(x-\mu t)^2}{2\sigma^2 t}\right].$$

## O modelo de Bachelier

Bachelier, em 1900, propôs que o preço de um ativo financeiro fosse descrito por um movimento Browniano contínuo, mas com $\mu = 0$.

Assim, o modelo de Bachelier tem algumas características não desejáveis:

- o modelo dá probabilidade não nula para o preço do ativo, $x$, assumir valores negativos, contrariando a condição de responsabilidades limitadas (limited liabilities);

- Bachelier supôs $\mu = 0$, sugerindo uma taxa de juros nula, o que não é sempre verdade.

Espero que você tenha apreciado esse processo limite. Tipicamente não é muito comum vermos esse movimento Browniano contínuo nos cursos de graduação. Agora você pode até sair por aí se gabando de ter conhecido a equação de Kolmogorov avançada ou equação de Fokker-Planck. :cool: