O movimento browniano geométrico

O modelo padrão da dinâmica do preço de um ativo financeiro é o chamado movimento Browniano geométrico. :???: Como explico brevemente em uma postagem anterior, o modelo de Bachelier não é perfeito para descrever a dinâmica de preços de um ativo financeiro. :sad: Um problema com esse modelo é que prevê valores negativos de preços. Quando compramos um lote de ações, por exemplo, gastamos um certo montante para pagar por ele e pela corretagem. Se a empresa correspondente ficar devendo muito para seus credores, o valor das ações que comprarmos poderá chegar a zero, mas jamais teremos a responsabilidade de pagar pela dívida da empresa, ou seja, jamais as ações que comprarmos terão valor negativo. Isso é o que significa responsabilidade limitada do dono de ações. No entanto, o retorno diário poderá ser positivo ou negativo. Se o preço de fechamento de um ativo era S_i ontem e hoje é S_{i+1}, então o retorno relativo de um dia fica:

$$R_{i+1} \quad = \quad \frac{S_{i+1} - S_i}{S_i},$$

que pode até ser expresso por uma porcentagem. Essa equação pode ainda ser escrita como:

$$1 + R_{i+1} \quad = \quad \frac{S_{i+1}}{S_i}.$$

Como os preços são positivos (é muito raro o preço ser zero), podemos tomar o logaritmo de ambos os membros da equação acima:

$$\ln\left(1 + R_{i+1}\right) \quad = \quad \ln\left(\frac{S_{i+1}}{S_i}\right).$$

Quando o retorno é bem pequeno, podemos escrever:

$$\ln\left(1 + R_{i+1}\right) \quad \approx \quad R_{i+1}$$

e, nesse caso,

$$R_{i+1} \quad \approx \quad \ln\left(\frac{S_{i+1}}{S_i}\right).$$

Essa expressão, para retornos pequenos, sugere que uma variável interessante é dada pelo logaritmo do quociente entre os preços de fechamento:

$$X_{i+1} \quad = \quad \ln\left(\frac{S_{i+1}}{S_i}\right).$$

Se o preço hoje tender a zero, X_{i+1} tenderá a valores negativos imensos. Se o preço hoje tender a valores muito altos, X_{i+1} também tenderá a valores positivos muito grandes. No caso contínuo, podemos definir a variável

$$X\left(t\right) \quad = \quad \ln\left[\frac{S\left(t\right)}{s_0}\right],$$

onde s_0 é o preço no instante $t = 0$, isto é,

$$s_0 \quad = \quad S(0)$$

e $S(t)$ é o preço no instante $t > 0$. O modelo padrão para a dinâmica de preços é obtido quando supomos que $X(t)$ executa um movimento browniano unidimensional, caracterizado pelos parâmetros μ e σ^2. Assim, a probabilidade de que a quantidade $X(t)$ tenha o valor x no instante t é dada, como vimos, por

$$u(x,t) \quad = \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} \exp\left[-\frac{(x-\mu t)^2}{2\sigma^2 t}\right].$$

Como é, então, a probabilidade de que o preço, $S(t)$, tenha o valor s no instante t?

Aqui, um pouco mais de sofisticação matemática é necessária. A distribuição

$$u(x,t) \quad = \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} \exp\left[-\frac{(x-\mu t)^2}{2\sigma^2 t}\right]$$

não pode descrever a probabilidade no caso contínuo, mas a densidade de probabilidade de que a variável x assuma um valor entre x e $x + dx$ no instante t. Isso é facilmente visto se tomarmos a integral

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, u(x,t) \quad &= \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \exp\left[-\frac{(x-\mu t)^2}{2\sigma^2 t}\right] \\ &= \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} \sqrt{\pi 2\sigma^2 t} = 1. \end{aligned}$$

Tivemos que multiplicar $u(x,t)$ por dx para podermos "somar" as probabilidades de todos os possíveis eventos (valores reais positivos, negativos e zero) e obter 1. Logo, a probabilidade é $dx\, u(x,t)$ e $u(x,t)$ é apenas a densidade de probabilidade de que a variável x assuma um valor entre x e $x + dx$ no instante t.

Para cada valor de $X(t)$, há um valor correspondente de $S(t)$, de forma que a probabilidade de encontrarmos $S(t)$ entre s e $s + ds$ no instante t é dada por

$$ds\, g(s,t) \quad = \quad dx\, u(x,t),$$

onde

$$x \quad = \quad \ln\left[\frac{s}{s_0}\right],$$

de acordo com a equação que define $X(t)$:

$$X(t) \quad = \quad \ln\left[\frac{S(t)}{s_0}\right].$$

Assim,

$$dx = \frac{ds}{s}$$

e

$$\begin{aligned} ds\, g(s,t) &= \frac{ds}{s} u(\ln s - \ln s_0, t) \\ &= ds \frac{1}{s\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} \exp\left[-\frac{(\ln s - \ln s_0 - \mu t)^2}{2\sigma^2 t}\right]. \end{aligned}$$

Logo,

$$g(s,t) = \frac{1}{s\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} \exp\left[-\frac{(\ln s - \ln s_0 - \mu t)^2}{2\sigma^2 t}\right].$$

Se definirmos a unidade de preços como sendo o valor s_0, então, em termos dessa unidade, $s_0 = 1$ e

$$g(s,t) = \frac{1}{s\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} \exp\left[-\frac{(\ln s - \mu t)^2}{2\sigma^2 t}\right],$$

Mas eu prefiro deixar s_0 na formulação e escrever $g(s,t)$ em termos de s_o :

$$g(s,t) = \frac{1}{s\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} \exp\left[-\frac{(\ln s - \ln s_0 - \mu t)^2}{2\sigma^2 t}\right].$$

Essa densidade de probabilidade é a que caracteriza o chamado movimento Browniano geométrico. As distribuições dos preços de ações e outros ativos financeiros muitas vezes são aproximadas pela função $g(s,t)$.

Agora, calculemos o valor esperado do preço e sua variância segundo a distribuição do movimento browniano geométrico. Comecemos pelo valor esperado do preço no instante t, dado que vale s_0 no instante $t = 0$:

$$\begin{aligned} \langle S(t) \rangle &= \int_0^\infty ds\, s g(s,t) \\ &= \int_0^\infty ds\, s \frac{1}{s\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} \exp\left[-\frac{(\ln s - \ln s_0 - \mu t)^2}{2\sigma^2 t}\right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} \int_0^\infty ds\, \exp\left[-\frac{(\ln s - \ln s_0 - \mu t)^2}{2\sigma^2 t}\right]. \end{aligned}$$

É importante observarmos que a notação que estamos usando indica a variável estocástica com letra maiúscula, como $S(t)$, e o valor que assume é denotado com a correspondente letra minúscula, como s. Para facilitar a integração, usemos a nova variável

$$x = \ln\left(\frac{s}{s_0}\right).$$

Logo,

$$dx = \frac{ds}{s},$$

ou seja,

$$\begin{aligned} ds &= sdx \\ &= s_0 \exp(x)\, dx. \end{aligned}$$

Assim, obtemos

$$\begin{aligned} \langle S(t)\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} \int_{-\infty}^{+\infty} s_0 \exp(x)\, dx\ \exp\left[-\frac{(x-\mu t)^2}{2\sigma^2 t}\right] \\ &= \frac{s_0}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} \int_{-\infty}^{+\infty} dx\ \exp\left[x - \frac{(x-\mu t)^2}{2\sigma^2 t}\right] \\ &= \frac{s_0}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} \int_{-\infty}^{+\infty} dx\ \exp\left[x - \frac{x^2 - 2x\mu t + (\mu t)^2}{2\sigma^2 t}\right], \end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned} \langle S(t)\rangle &= \frac{s_0}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} \int_{-\infty}^{+\infty} dx\ \exp\left[-\frac{-2\sigma^2 tx + x^2 - 2x\mu t + (\mu t)^2}{2\sigma^2 t}\right] \\ &= \frac{s_0}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} \int_{-\infty}^{+\infty} dx\ \exp\left[-\frac{x^2 - 2x\left(\mu t + \sigma^2 t\right) + (\mu t)^2}{2\sigma^2 t}\right]. \end{aligned}$$

Podemos completar o quadrado que aparece no numerador do argumento da exponencial:

$$\begin{aligned} x^2 - 2x\left(\mu t + \sigma^2 t\right) + (\mu t)^2 &= \left(x - \mu t - \sigma^2 t\right)^2 - \left(\mu t + \sigma^2 t\right)^2 + (\mu t)^2 \\ &= \left(x - \mu t - \sigma^2 t\right)^2 - (\mu t)^2 - 2\mu\sigma^2 t^2 - \left(\sigma^2 t\right)^2 + (\mu t)^2 \\ &= \left(x - \mu t - \sigma^2 t\right)^2 - 2\mu\sigma^2 t^2 - \left(\sigma^2 t\right)^2. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \langle S(t)\rangle &= \frac{s_0}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} \int_{-\infty}^{+\infty} dx\ \exp\left[-\frac{\left(x - \mu t - \sigma^2 t\right)^2 - 2\mu\sigma^2 t^2 - \left(\sigma^2 t\right)^2}{2\sigma^2 t}\right] \\ &= \frac{s_0}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} \int_{-\infty}^{+\infty} dx\ \exp\left[-\frac{\left(x - \mu t - \sigma^2 t\right)^2}{2\sigma^2 t} + \frac{2\mu\sigma^2 t^2 + \left(\sigma^2 t\right)^2}{2\sigma^2 t}\right], \end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned} \langle S(t)\rangle &= \frac{s_0}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} \int_{-\infty}^{+\infty} dx\ \exp\left[-\frac{\left(x - \mu t - \sigma^2 t\right)^2}{2\sigma^2 t} + \frac{2\mu\sigma^2 t^2}{2\sigma^2 t} + \frac{\left(\sigma^2 t\right)^2}{2\sigma^2 t}\right] \\ &= \frac{s_0}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} \int_{-\infty}^{+\infty} dx\ \exp\left[-\frac{\left(x - \mu t - \sigma^2 t\right)^2}{2\sigma^2 t} + \left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right) t\right], \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
\langle S\,(t)\rangle &= \frac{s_0 \exp\left[\left(\mu+\frac{\sigma^2}{2}\right)t\right]}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \exp\left[-\frac{\left(x-\mu t-\sigma^2 t\right)^2}{2\sigma^2 t}\right] \\
&= \frac{s_0 \exp\left[\left(\mu+\frac{\sigma^2}{2}\right)t\right]}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} \sqrt{\pi 2\sigma^2 t} \\
&= s_0 \exp\left[\left(\mu+\frac{\sigma^2}{2}\right)t\right].
\end{aligned}$$

Calculemos agora a variância do preço:

$$\begin{aligned}
\operatorname{var}\left[S\,(t)\right] &= \left\langle \left[S\,(t)-\langle S\,(t)\rangle\right]^2 \right\rangle \\
&= \left\langle \left[S\,(t)\right]^2 - 2S\,(t)\,\langle S\,(t)\rangle + \left[\langle S\,(t)\rangle\right]^2 \right\rangle \\
&= \left\langle \left[S\,(t)\right]^2 \right\rangle - \langle 2S\,(t)\,\langle S\,(t)\rangle\rangle + \left\langle \langle S\,(t)\rangle^2 \right\rangle,
\end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned}
\operatorname{var}\left[S\,(t)\right] &= \left\langle \left[S\,(t)\right]^2 \right\rangle - 2\,\langle S\,(t)\rangle\,\langle S\,(t)\rangle + \langle S\,(t)\rangle^2 \\
&= \left\langle \left[S\,(t)\right]^2 \right\rangle - \langle S\,(t)\rangle^2 .
\end{aligned}$$

Assim, como já temos o valor esperado do preço, agora só falta calcularmos o valor esperado do preço elevado ao quadrado:

$$\begin{aligned}
\left\langle \left[S\,(t)\right]^2 \right\rangle &= \int_0^{\infty} ds\, s^2 g\,(s,t) \\
&= \int_0^{\infty} ds\, s^2 \frac{1}{s\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} \exp\left[-\frac{\left(\ln s-\ln s_0-\mu t\right)^2}{2\sigma^2 t}\right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} \int_0^{\infty} ds\, s \exp\left[-\frac{\left(\ln s-\ln s_0-\mu t\right)^2}{2\sigma^2 t}\right].
\end{aligned}$$

Usando a mesma substituição de variável acima,

$$x = \ln\left(\frac{s}{s_0}\right),$$

obtemos

$$\begin{aligned}
\left\langle \left[S\,(t)\right]^2 \right\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, s_0^2 \exp\left(2x\right) \exp\left[-\frac{\left(x-\mu t\right)^2}{2\sigma^2 t}\right] \\
&= \frac{s_0^2}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \exp\left[2x-\frac{\left(x-\mu t\right)^2}{2\sigma^2 t}\right],
\end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned}
\left\langle [S(t)]^2 \right\rangle &= \frac{s_0^2}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \, \exp\left[-\frac{(x-\mu t)^2 - 4x\sigma^2 t}{2\sigma^2 t}\right] \\
&= \frac{s_0^2}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \, \exp\left[-\frac{x^2 - 2x\left(\mu t + 2\sigma^2 t\right) + (\mu t)^2}{2\sigma^2 t}\right],
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
\left\langle [S(t)]^2 \right\rangle &= \frac{s_0^2}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \, \exp\left[-\frac{\left(x-\mu t - 2\sigma^2 t\right)^2 - \left(\mu t + 2\sigma^2 t\right)^2 + (\mu t)^2}{2\sigma^2 t}\right] \\
&= \frac{s_0^2}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \, \exp\left[-\frac{\left(x-\mu t - 2\sigma^2 t\right)^2 - \left(2\sigma^2 t\right)^2 - 4\mu\sigma^2 t^2}{2\sigma^2 t}\right],
\end{aligned}$$

ou ainda,

$$\begin{aligned}
\left\langle [S(t)]^2 \right\rangle &= \frac{s_0^2}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \, \exp\left[-\frac{\left(x-\mu t - 2\sigma^2 t\right)^2}{2\sigma^2 t} + \frac{\left(2\sigma^2 t\right)^2}{2\sigma^2 t} + \frac{4\mu\sigma^2 t^2}{2\sigma^2 t}\right] \\
&= \frac{s_0^2}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \, \exp\left[-\frac{\left(x-\mu t - 2\sigma^2 t\right)^2}{2\sigma^2 t} + 2\sigma^2 t + 2\mu t\right]
\end{aligned}$$

e, portanto,

$$\begin{aligned}
\left\langle [S(t)]^2 \right\rangle &= \frac{s_0^2 \exp\left[2\sigma^2 t + 2\mu t\right]}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \, \exp\left[-\frac{\left(x-\mu t - 2\sigma^2 t\right)^2}{2\sigma^2 t}\right] \\
&= s_0^2 \exp\left[2\left(\mu + \sigma^2\right) t\right].
\end{aligned}$$

Assim, a variância fica

$$\begin{aligned}
\operatorname{var}[S(t)] &= s_0^2 \exp\left[2\left(\mu + \sigma^2\right) t\right] - \left\{ s_0 \exp\left[\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right) t\right]\right\}^2 \\
&= s_0^2 \left\{ \exp\left[2\left(\mu + \sigma^2\right) t\right] - \exp\left[\left(2\mu + \sigma^2\right) t\right]\right\},
\end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned}
\operatorname{var}[S(t)] &= s_0^2 \exp\left[\left(2\mu + \sigma^2\right) t\right] \left\{ \exp\left[2\left(\mu + \sigma^2\right) t - \left(2\mu + \sigma^2\right) t\right] - 1\right\} \\
&= s_0^2 \exp\left[\left(2\mu + \sigma^2\right) t\right] \left[\exp\left(\sigma^2 t\right) - 1\right].
\end{aligned}$$

Se, ao invés de escolher o tempo inicial como sendo zero, escolhermos o tempo inicial em t_i, poderemos escrever os valores esperados acima no instante final $t_f > t_i$ como

$$\langle S(t_f) \rangle = s_i \exp\left[\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right)(t_f - t_i)\right],$$

onde s_i é o preço que ocorre, de fato, no instante inicial t_i e

$$\operatorname{var}\left[S\left(t_f\right)\right] = s_i^2 \exp\left[\left(2\mu+\sigma^2\right)\left(t_f-t_i\right)\right]\left\{\exp\left[\sigma^2\left(t_f-t_i\right)\right]-1\right\}.$$

Na prática, podemos estimar os parâmetros μ e σ considerando que t indexe os fechamentos dos pregões. Então, dado o pregão inicial em $t_i = n$, teremos os valores esperados acima para o pregão final $t_f = m > n$:

$$\langle S(m)\rangle = s_n \exp\left[\left(\mu+\frac{\sigma^2}{2}\right)(m-n)\right]$$

e

$$\operatorname{var}\left[S(m)\right] = s_n^2 \exp\left[\left(2\mu+\sigma^2\right)(m-n)\right]\left\{\exp\left[\sigma^2(m-n)\right]-1\right\}.$$

Podemos, por exemplo, tomar os preços nos fechamentos de pregões consecutivos e, então, temos

$$m = n+1.$$

Nesse caso,

$$\langle S(n+1)\rangle = s_n \exp\left(\mu+\frac{\sigma^2}{2}\right)$$

e

$$\operatorname{var}\left[S(n+1)\right] = s_n^2 \exp\left(2\mu+\sigma^2\right)\left\{\exp\left(\sigma^2\right)-1\right\}.$$

Como determinamos os parâmetros μ e σ? Como já explicado em uma postagem anterior, a distribuição da variável estocástica X, com valores x relacionados aos valores s pela equação

$$x = \ln\left(\frac{s}{s_0}\right),$$

é uma gaussiana com valor esperado μ e variância σ^2. Logo, para o $(n+1)$-ésimo pregão, temos:

$$\mu = \langle X_{n+1}\rangle$$

e

$$\sigma^2 = \left\langle X_{n+1}^2\right\rangle - \mu^2,$$

onde, em analogia com a equação

$$x = \ln\left(\frac{s}{s_0}\right),$$

escrevemos

$$X_{n+1} = \ln\left[\frac{S_{n+1}}{s_n}\right].$$

Os parâmetros μ e σ não dependem, portanto, de n, ou seja, não dependem do pregão. Isso permite calculá-los através de uma análise estatística da série histórica dos pregões. Assim, conhecendo os fechamentos de N pregões, calculamos:

$$\mu = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N-1}\ln\left(\frac{s_{k+1}}{s_k}\right)$$

e

$$\sigma^2 = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N-1}\left[\ln\left(\frac{s_{k+1}}{s_k}\right)\right]^2 - \mu^2.$$

O movimento browniano geométrico é uma primeira aproximação para a dinâmico do preço de um ativo financeiro. A realidade de como os preços de ativos evoluem no tempo é bem mais complexa do que esse modelo descreve. Os valores de μ e σ^2 não são fixos ao longo do tempo. Além disso, a dinâmica da variância σ^2 também é descrita, em alguns modelos mais sofisticados, como sendo estocástica. No entanto, temos que começar de algum lugar, não é mesmo? :cool: