Oscilações amortecidas

Uso de variável complexa para obter a solução harmônica real

A grande vantagem de poder utilizar números complexos para resolver a equação do oscilador harmônico está associada com o fato de que essa equação é linear. Para ver isso, pense que se z é uma variável complexa e

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -\omega^2 z,$$

sendo ω uma constante real e positiva, então tanto a parte real de z como a imaginária devem satisfazer a mesma equação. Em outras palavras, se

$$z = x + iy,$$

com x e y reais, segue que a validade da equação

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -\omega^2 z$$

implica em

$$\frac{d^2}{dt^2}(x+iy) = -\omega^2 (x+iy),$$

isto é,

$$\frac{d^2x}{dt^2} + i\frac{d^2y}{dt^2} = -\omega^2 x - i\omega^2 y,$$

ou seja,

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = -i\left(\frac{d^2y}{dt^2} + \omega^2 y\right),$$

que somente pode ser verdadeira quando, simultaneamente,

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

e

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \omega^2 y = 0,$$

já que, obviamente, um número real não nulo jamais pode ser igual a um número puramente imaginário. Isso quer dizer que podemos encontrar a solução geral da variável complexa e, tomando a parte real ou imaginária dessa solução, obter a solução geral da equação para variável real.

Exemplo: oscilações amortecidas

O oscilador amortecido pode ser pensado como o sistema massa-mola, mas agora com uma força de resistência proporcional e oposta à velocidade. A força, então, pode ser expressa assim:

$$F_x = -kx - \alpha \frac{dx}{dt},$$

onde α e k são constantes reais positivas. Usando a segunda lei de Newton, ficamos com a equação diferencial do oscilador amortecido:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - \alpha \frac{dx}{dt}.$$

Como é costumeiro, vou dividir tudo por m e definir as constantes

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

e

$$\gamma = \frac{\alpha}{m}.$$

A equação do oscilador harmônico amortecido fica, portanto,

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0.$$

Veja que quando fazemos $\gamma = 0$ obtemos a equação do oscilador harmônico simples. O objetivo aqui é exemplificar o método para obter a solução dessa equação da variável real x através do método da variável complexa, como explicado acima.

Ao invés de resolver a equação para x, procuremos pela solução geral da equação

$$\frac{d^2z}{dt^2} + \gamma\frac{dz}{dt} + \omega_0^2 z = 0,$$

onde z é uma variável complexa, digamos,

$$z = x + iy.$$

Usar essa variável complexa é um grande negócio, pois a exponencial serve como tentativa. Note que o seno ou o cosseno sozinhos não funcionam, pois há, ao mesmo tempo, a derivada segunda e a derivada primeira com relação a z na equação. Para entender melhor o que acabo de escrever, tentemos uma solução exponencial assim:

$$z_e(t) = A\exp(\zeta t),$$

onde A e ζ são constantes complexas. Facilmente vemos que

$$\frac{dz_e(t)}{dt} = \zeta A \exp(\zeta t) = \zeta z_e(t)$$

e

$$\frac{d^2 z_e(t)}{dt^2} = \zeta \frac{dz_e(t)}{dt} = \zeta^2 z_e(t).$$

Substituindo essas derivadas na equação diferencial acima, obtemos

$$\frac{d^2 z_e(t)}{dt^2} + \gamma \frac{dz_e(t)}{dt} + \omega_0^2 z_e(t) = \zeta^2 z_e(t) + \gamma \zeta z_e(t) + \omega_0^2 z_e(t) = \left(\zeta^2 + \gamma\zeta + \omega_0^2\right) z_e(t) = 0.$$

Como queremos encontrar uma solução $z_e(t)$ que não seja identicamente nula, segue que

$$\zeta^2 + \gamma\zeta + \omega_0^2 = 0.$$

As soluções para ζ são dadas pela fórmula de Bhaskara para a equação algébrica quadrática acima:

$$\zeta_\pm = \frac{-\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - 4\omega_0^2}}{2} = -\frac{\gamma}{2} \pm \frac{\sqrt{\gamma^2 - 4\omega_0^2}}{2} = -\frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - \omega_0^2}.$$

Olhando para esse resultado distinguimos dois casos: quando $\gamma \neq 2\omega_0$, dando

$$\sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - \omega_0^2} \neq 0,$$

e quando $\gamma = 2\omega_0$, dando

$$\sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - \omega_0^2} = 0.$$

No primeiro caso, ζ_+ é distinto de ζ_-, enquanto que, no segundo, $\zeta_+ = \zeta_-$.

Amortecimento supercrítico

Quando ζ_+ é distinto de ζ_-, segue que a solução geral do problema complexo é dada por

$$z(t) = A_+ \exp(\zeta_+ t) + A_- \exp(\zeta_- t),$$

onde A_+ e A_- são duas constantes complexas arbitrárias e independentes. Quando $\gamma > 2\omega_0$, tanto ζ_+ como ζ_- são reais e negativas. Essa situação é conhecida como amortecimento supercrítico. Nesse caso particular,

$$\mathrm{Re}\left[z(t)\right] = a_+ \exp(\zeta_+ t) + a_- \exp(\zeta_- t),$$

onde

$$a_+ = \mathrm{Re}\left(A_+\right)$$

e

$$a_- = \mathrm{Re}\left(A_-\right).$$

Conseguimos, então, quando $\gamma > 2\omega_0$, a solução da equação diferencial para $x = \mathrm{Re}\left[z\left(t\right)\right]$,

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$

e o resultado é

$$x\left(t\right) = a_+ \exp\left(\zeta_+ t\right) + a_- \exp\left(\zeta_- t\right),$$

onde a_+ e a_- são constantes reais arbitrárias e independentes e

$$\zeta_\pm = -\frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - \omega_0^2} < 0.$$

Amortecimento subcrítico

Agora vamos ver como obter $x\left(t\right)$ quando $\gamma < 2\omega_0$. Essa situação é conhecida como amortecimento subcrítico. Nesse caso, escrevemos

$$\zeta_\pm = -\frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - \omega_0^2} = -\frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{-\left(\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}\right)},$$

isto é,

$$\zeta_\pm = -\frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{-1}\sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}} = -\frac{\gamma}{2} \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}} = -\frac{\gamma}{2} \pm i\omega,$$

onde, por conveniência notacional, definimos

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}}.$$

Nesse caso, podemos escrever

$$z\left(t\right) = A_+ \exp\left(\zeta_+ t\right) + A_- \exp\left(\zeta_- t\right) = \exp\left(-\frac{\gamma}{2}t\right)\left[A_+ \exp\left(i\omega t\right) + A_- \exp\left(-i\omega t\right)\right].$$

Usando a fórmula de Euler, escrevemos

$$\exp\left(i\omega t\right) = \cos\left(\omega t\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\omega t\right)$$

e

$$\exp\left(-i\omega t\right) = \cos\left(\omega t\right) - i\,\mathrm{sen}\left(\omega t\right).$$

Com isso,

$$z\left(t\right) = \exp\left(-\frac{\gamma}{2}t\right)\left[\left(A_{+}+A_{-}\right)\cos\left(\omega t\right) + i\left(A_{+}-A_{-}\right)\,\mathrm{sen}\left(\omega t\right)\right].$$

Para encontrar $x\left(t\right)$, basta tomar a parte real dessa expressão:

$$\mathrm{Re}\left[z\left(t\right)\right] = \exp\left(-\frac{\gamma}{2}t\right)\left\{\mathrm{Re}\left(A_{+}+A_{-}\right)\cos\left(\omega t\right) + \mathrm{Re}\left[i\left(A_{+}-A_{-}\right)\right]\,\mathrm{sen}\left(\omega t\right)\right\}.$$

É claro que

$$\mathrm{Re}\left[i\left(A_{+}-A_{-}\right)\right] = -\mathrm{Im}\left(A_{+}-A_{-}\right).$$

Então, definindo as constantes reais c_1 e c_2 como

$$c_1 = \mathrm{Re}\left(A_{+}+A_{-}\right)$$

e

$$c_2 = -\mathrm{Im}\left(A_{+}-A_{-}\right),$$

obtemos a solução para $x\left(t\right)$ quando $\gamma < 2\omega_0$:

$$x\left(t\right) = \exp\left(-\frac{\gamma}{2}t\right)\left[c_1\cos\left(\omega t\right) + c_2\,\mathrm{sen}\left(\omega t\right)\right],$$

onde c_1 e c_2 são constantes reais arbitrárias e independentes.

Amortecimento crítico

A situação em que $\gamma = 2\omega_0$, implicando que $\zeta_{+} = \zeta_{-}$, é conhecida como amortecimento crítico. Agora, diferentemente dos casos tratados acima, quando $\zeta_{+} = \zeta_{-}$, ficamos apenas com uma só constante arbitrária:

$$z_0\left(t\right) = A_0\exp\left(-\frac{\gamma}{2}t\right),$$

onde A_0 é uma constante complexa arbitrária. Cadê a outra constante? Afinal, o problema é encontrar a solução geral de uma equação diferencial ordinária de segunda ordem e, portanto, precisamos de uma solução com duas constantes complexas arbitrárias e independentes. Consideremos, então, a equação diferencial para o problema quando $\gamma = 2\omega_0$:

$$\frac{d^2z\left(t\right)}{dt^2} + \gamma\frac{dz\left(t\right)}{dt} + \frac{\gamma^2}{4}z\left(t\right) = 0.$$

Essa mesma equação pode ser escrita assim:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dz\left(t\right)}{dt} + \frac{\gamma}{2}z\left(t\right)\right) + \frac{\gamma}{2}\left(\frac{dz\left(t\right)}{dt} + \frac{\gamma}{2}z\left(t\right)\right) = 0.$$

Para ver isso, note que

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dz\left(t\right)}{dt}+\frac{\gamma}{2}z\left(t\right)\right)+\frac{\gamma}{2}\left(\frac{dz\left(t\right)}{dt}+\frac{\gamma}{2}z\left(t\right)\right) = \frac{d^{2}z\left(t\right)}{dt^{2}}+\gamma\frac{dz\left(t\right)}{dt}+\frac{\gamma^{2}}{4}z\left(t\right),$$

que dá zero, pois, como sabemos,

$$\frac{d^{2}z\left(t\right)}{dt^{2}}+\gamma\frac{dz\left(t\right)}{dt}+\frac{\gamma^{2}}{4}z\left(t\right) = 0.$$

Olhe para a equação:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dz\left(t\right)}{dt}+\frac{\gamma}{2}z\left(t\right)\right)+\frac{\gamma}{2}\left(\frac{dz\left(t\right)}{dt}+\frac{\gamma}{2}z\left(t\right)\right) = 0.$$

Seja a nova função complexa

$$f\left(t\right) = \frac{dz\left(t\right)}{dt}+\frac{\gamma}{2}z\left(t\right).$$

Então, a equação acima pode ser escrita, em termos de $f\left(t\right)$, como

$$\frac{df\left(t\right)}{dt}+\frac{\gamma}{2}f\left(t\right) = 0.$$

Essa equação para $f\left(t\right)$ é de primeira ordem e, portanto, sua solução terá apenas uma constante arbitrária. O resultado é fácil:

$$f\left(t\right) = B\exp\left(-\frac{\gamma}{2}t\right),$$

onde B é uma constante complexa arbitrária. Que essa é a solução da equação para $f\left(t\right)$ é óbvio, pois

$$\frac{df\left(t\right)}{dt} = \frac{d}{dt}\left[B\exp\left(-\frac{\gamma}{2}t\right)\right]=-\frac{\gamma}{2}B\exp\left(-\frac{\gamma}{2}t\right)=-\frac{\gamma}{2}f\left(t\right)$$

e, portanto,

$$\frac{df\left(t\right)}{dt}+\frac{\gamma}{2}f\left(t\right) = -\frac{\gamma}{2}f\left(t\right)+\frac{\gamma}{2}f\left(t\right)=0.$$

Note que definimos $f\left(t\right)$ em termos de $z\left(t\right)$ e de sua primeira derivada, isto é,

$$f\left(t\right) = \frac{dz\left(t\right)}{dt}+\frac{\gamma}{2}z\left(t\right).$$

Mas essa equação pode ser pensada como uma equação diferencial ordinária de primeira ordem para $z\left(t\right)$:

$$\frac{dz\left(t\right)}{dt}+\frac{\gamma}{2}z\left(t\right) = f\left(t\right),$$

isto é, substituindo a solução para $f(t)$, vem

$$\frac{dz(t)}{dt} + \frac{\gamma}{2} z(t) = B \exp\left(-\frac{\gamma}{2} t\right).$$

Se você olhar firmemente para essa equação por um tempo suficiente, verá que também é possível escrevê-la assim:

$$\exp\left(\frac{\gamma}{2} t\right) \frac{dz(t)}{dt} + \frac{\gamma}{2} \exp\left(\frac{\gamma}{2} t\right) z(t) = B.$$

Nesse ponto, imediatamente você perceberá que

$$\frac{\gamma}{2} \exp\left(\frac{\gamma}{2} t\right) = \frac{d}{dt} \exp\left(\frac{\gamma}{2} t\right)$$

e, portanto, a equação diferencial acima fica

$$\exp\left(\frac{\gamma}{2} t\right) \frac{dz(t)}{dt} + z(t) \frac{d}{dt} \exp\left(\frac{\gamma}{2} t\right) = B.$$

Mas o membro esquerdo dessa equação nada mais é do que a derivada do produto de duas funções, isto é, essa equação pode ser escrita como

$$\frac{d}{dt}\left[z(t) \exp\left(\frac{\gamma}{2} t\right)\right] = B.$$

É ou não é verdade? Integrando ambos os membros dessa última equação, vem

$$z(t) \exp\left(\frac{\gamma}{2} t\right) = Bt + C,$$

onde C é outra constante complexa arbitrária. Encontramos, assim, para o caso em que $\gamma = 2\omega_0$, a solução geral da equação do oscilador harmônico amortecido:

$$z(t) = (Bt + C) \exp\left(-\frac{\gamma}{2} t\right),$$

onde B e C são constantes complexas arbitrárias e independentes. De maneira análoga aos casos tratados acima, podemos encontrar a solução para $x(t)$ tomando a parte real de $z(t)$ e obtemos

$$\mathrm{Re}[z(t)] = [\mathrm{Re}(B)\, t + \mathrm{Re}(C)] \exp\left(-\frac{\gamma}{2} t\right).$$

Portanto, no caso particular em que $\gamma = 2\omega_0$, definindo

$$b = \mathrm{Re}(B)$$

e

$$c = \mathrm{Re}(C)$$

e tomando $x(t) = \mathrm{Re}[z(t)]$, vem

$$x(t) = (bt + c) \exp\left(-\frac{\gamma}{2} t\right),$$

onde b e c são constantes reais arbitrárias e independentes. Ufa! Que postagem longa! Espero que você tenha acompanhado todos os argumentos.