A fórmula de Euler

Você já conhece bem $\mathbb{R}$, que é o conjunto dos números reais. Talvez você conheça um pouco $\mathbb{C}$, que é o conjunto dos números complexos. Não vou fazer aqui toda uma introdução rebuscada aos números complexos; vou apenas deixar um link suficientemente completo e elementar: http://en.wikipedia.org/wiki/Complex_number. Deixo o link em inglês porque é mais compreensivo, mas, se preferir, você pode ver o conteúdo análogo em português na Wikipédia. Em essência, os números complexos são todos os reais e mais a unidade imaginária, o número imaginário i, cuja propriedade que o define é, simplesmente,

$$i = \sqrt{-1}.$$

Em outras palavras,

$$i^2 = -1.$$

Já falamos sobre a equação diferencial do oscilador harmônico simples,

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x,$$

cuja solução geral é dada por

$$x(t) = A_x \operatorname{sen}(\omega t) + B_x \cos(\omega t),$$

onde as constantes A_x e B_x são arbitrárias. Todas as grandezas aqui são reais, inclusive as constantes arbitrárias. E se quiséssemos resolver uma equação de oscilador harmônico, mas no contexto dos números complexos?

Vamos supor que, além da coordenada x acima, também tenhamos a equação para a coordenada y :

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\omega^2 y,$$

onde tanto x como y são reais e também estamos sempre supondo que ω é um número real e positivo. A solução geral dessa equação para y, no contexto dos números reais, é também dada por uma combinação linear arbitrária de seno e cosseno de ωt :

$$y(t) = A_y \operatorname{sen}(\omega t) + B_y \cos(\omega t),$$

onde A_y e B_y são outras constantes reais arbitrárias, não necessariamente dependentes de A_x e B_x.

Agora eu pergunto: qual é a solução geral da equação

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -\omega^2 z$$

quando z é um número complexo? Isso mesmo que você deve estar pensando: t e ω são reais, mas z é dado, digamos, por

$$z = x + iy.$$

Para responder isso, basta considerarmos

$$\frac{d^2}{dt^2}(x+iy) = -\omega^2 (x+iy).$$

Seríamos extremamente esquisitos se não nos permitíssemos escrever, nesse ponto, que

$$\frac{d^2}{dt^2}(x+iy) = \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{d^2}{dt^2}(iy) = \frac{d^2x}{dt^2} + i\frac{d^2y}{dt^2},$$

pois, como eu disse mais acima, os números complexos nada mais são do que os reais acrescidos de uma unidade complexa $i = \sqrt{-1}$. Logo, é natural que as mesmas operações diferenciais que são realizadas sobre os reais possam também ser realizadas da mesma maneira sobre os complexos. Enfim, podemos escrever a equação diferencial complexa acima como

$$\frac{d^2x}{dt^2} + i\frac{d^2y}{dt^2} = -\omega^2 x - i\omega^2 y.$$

Se

$$z = x + iy,$$

segue que seu complexo conjugado é obtido trocando i por $-i$, isto é,

$$z^* = x - iy.$$

Então, a equação de oscilador harmônico para z^*, que é obtida da equação para z trocando z por z^*, fica

$$\frac{d^2z^*}{dt^2} = -\omega^2 z^*.$$

Substituindo

$$z^* = x - iy$$

nessa equação obviamente dá

$$\frac{d^2x}{dt^2} - i\frac{d^2y}{dt^2} = -\omega^2 x + i\omega^2 y.$$

Então, agora, temos duas equações simultâneas para x e y :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + i\frac{d^2y}{dt^2} = -\omega^2 x - i\omega^2 y$$

e

$$\frac{d^2x}{dt^2} - i\frac{d^2y}{dt^2} = -\omega^2 x + i\omega^2 y.$$

Somando membro a membro e dividindo por 2 vem

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x.$$

Subtraindo membro a membro as equações do sistema acima e dividindo por $2i$ vem

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\omega^2 y.$$

Mas já conhecemos as soluções gerais para essas equações e, portanto, agora também teremos a solução geral da equação para z :

$$z(t) = x(t) + iy(t) = A_x \operatorname{sen}(\omega t) + B_x \cos(\omega t) + i\left[A_y \operatorname{sen}(\omega t) + B_y \cos(\omega t)\right],$$

isto é,

$$z(t) = (A_x + iA_y) \operatorname{sen}(\omega t) + (B_x + iB_y)\cos(\omega t).$$

Podemos definir duas constantes complexas arbitrárias em termos das reais assim:

$$C = A_x + iA_y$$

e

$$D = B_x + iB_y.$$

Com isso, podemos escrever

$$z(t) = C \operatorname{sen}(\omega t) + D\cos(\omega t),$$

onde C e D são duas constantes complexas arbitrárias, já que A_x, B_x, A_y e B_y são reais e completamente arbitrárias. Assim, a solução geral da equação do oscilador harmônico para a variável complexa z tem exatamente a mesma forma que a solução geral para variáveis reais x e y, com a diferença de que as duas constantes arbitrárias, C e D, são complexas.

O oscilador harmônico simples para uma variável complexa

Vamos considerar a equação de oscilador harmônico para a variável complexa z novamente:

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -\omega^2 z.$$

Agora já sabemos que a solução geral dessa equação é complexa e tem constantes arbitrárias complexas. Como já tentamos anteriormente, porém pensando em números reais, podemos procurar por soluções exponenciais da equação acima:

$$z_e(t) = A\exp(\alpha t).$$

Assim,

$$\frac{d^2 z_e(t)}{dt^2} = \alpha^2 A \exp(\alpha t) = \alpha^2 z_e(t),$$

que somente é solução da equação do oscilador harmônico simples se

$$\alpha^2 = -\omega^2,$$

ou seja,

$$\alpha = \pm\sqrt{-\omega^2} = \pm\sqrt{-1}\sqrt{\omega^2} = \pm i\omega,$$

supondo, como acima, que ω é um número real e positivo. Então, encontramos duas possíveis soluções, linearmente independentes, para a equação de oscilador harmônico de uma variável complexa:

$$z_+(t) = A_+\exp(i\omega t)$$

e

$$z_-(t) = A_-\exp(-i\omega t).$$

Essas soluções são linearmente independentes porque, caso não fossem, teríamos

$$\exp(i\omega t) = \lambda\exp(-i\omega t),$$

para alguma constante λ complexa e, nesse caso, multiplicando ambos os membros dessa equação por $\exp(i\omega t)$ temos

$$\exp(i\omega t)\exp(i\omega t) = \lambda\exp(-i\omega t)\exp(i\omega t).$$

No entanto, preservando as propriedades algébricas desejáveis da função exponencial, escrevemos

$$\exp(i\omega t)\exp(i\omega t) = \exp(2i\omega t)$$

e

$$\exp(-i\omega t)\exp(i\omega t) = 1.$$

Com isso,

$$\exp(i\omega t)\exp(i\omega t) = \lambda\exp(-i\omega t)\exp(i\omega t)$$

implica em

$$\exp(2i\omega t) \quad = \quad \lambda,$$

ou seja, a função exponencial complexa seria uma constante, o que é absolutamente contraditório, já que essa função deve descrever oscilações. Essa contradição implica na falsidade de nossa hipótese de que $A_+ \exp(i\omega t)$ e $A_- \exp(-i\omega t)$ são linearmente dependentes e, portanto concluímos que essas soluções são linearmente independentes.

Podemos escrever essas exponenciais complexas? O que entendemos por uma exponencial de número complexo? Por enquanto, vamos apenas supor que possamos fazer isso: no lugar de um número real no argumento de uma função exponencial, vamos colocar um número complexo. Essa atividade é chamada de continuação analítica da função exponencial.

A solução geral da equação de oscilador harmônico simples para a variável complexa z, nesse caso, é obtica pela combinação linear dessas duas soluções:

$$z(t) \quad = \quad A_+ \exp(i\omega t) + A_- \exp(-i\omega t),$$

onde A_+ e A_- são constantes complexas arbitrárias. Ora, anteriormente havíamos encontrado, como solução, a expressão

$$z(t) \quad = \quad C \operatorname{sen}(\omega t) + D \cos(\omega t).$$

Como essa expressão pode ser equivalente à nova resposta,

$$z(t) \quad = \quad A_+ \exp(i\omega t) + A_- \exp(-i\omega t),$$

que é dada em termos de exponenciais complexas? Afinal, o que quer dizer uma exponencial complexa? Para responder isso, vamos impor que as duas formas sejam realmente equivalente e ver o que obteremos:

$$C \operatorname{sen}(\omega t) + D \cos(\omega t) \quad = \quad A_+ \exp(i\omega t) + A_- \exp(-i\omega t).$$

Essa equação deve valer para todo instante t. Logo, para $t = 0$, temos:

$$D \quad = \quad A_+ + A_-,$$

impondo, naturalmente, que

$$\exp(0) \quad = \quad 1.$$

Podemos derivar membro a membro a equação

$$C \operatorname{sen}(\omega t) + D \cos(\omega t) \quad = \quad A_+ \exp(i\omega t) + A_- \exp(-i\omega t)$$

e obter

$$\omega C \cos(\omega t) + \omega D \operatorname{sen}(\omega t) \quad = \quad i\omega A_+ \exp(i\omega t) - i\omega A_- \exp(-i\omega t),$$

isto é,

$$C\cos(\omega t) + D\,\mathrm{sen}\,(\omega t) \quad = \quad iA_+\exp(i\omega t) - iA_-\exp(-i\omega t)\,,$$

Essa equação também deve ser válida para todo instante t e, portanto, para $t = 0$, obtemos:

$$C \quad = \quad iA_+ - iA_-.$$

Substituindo C e D na equação

$$C\,\mathrm{sen}\,(\omega t) + D\cos(\omega t) \quad = \quad A_+\exp(i\omega t) + A_-\exp(-i\omega t)$$

resulta em

$$(iA_+ - iA_-)\,\mathrm{sen}\,(\omega t) + (A_+ + A_-)\cos(\omega t) \quad = \quad A_+\exp(i\omega t) + A_-\exp(-i\omega t)\,,$$

isto é,

$$A_+\left[i\,\mathrm{sen}\,(\omega t) + \cos(\omega t) - \exp(i\omega t)\right] + A_-\left[-i\,\mathrm{sen}\,(\omega t) + \cos(\omega t) - \exp(-i\omega t)\right] \quad = \quad 0,$$

para qualquer escolha independente de A_+ e A_-, já que são constantes completamente arbitrárias. Para que essa equação seja sempre válida, sem importar os valores assumidos por A_+ e A_-, devemos ter, simultaneamente,

$$i\,\mathrm{sen}\,(\omega t) + \cos(\omega t) - \exp(i\omega t) \quad = \quad 0$$

e

$$-i\,\mathrm{sen}\,(\omega t) + \cos(\omega t) - \exp(-i\omega t) \quad = \quad 0,$$

isto é,

$$\exp(i\omega t) \quad = \quad \cos(\omega t) + i\,\mathrm{sen}\,(\omega t)$$

e

$$\exp(-i\omega t) \quad = \quad \cos(\omega t) - i\,\mathrm{sen}\,(\omega t)\,.$$

Note que, de fato, a expressão para $\exp(-i\omega t)$ é o que obtemos tomando a expressão conjugada de $\exp(i\omega t)$, conforme dada acima, isto é, trocando, na equação

$$\exp(i\omega t) \quad = \quad \cos(\omega t) + i\,\mathrm{sen}\,(\omega t)\,,$$

a unidade imaginária, i, por $-i$. A fórmula de Euler é dada por essa expressão.

É fácil, agora, escrever o cosseno e o seno em termos de exponenciais complexas; somando

$$\exp(i\omega t) \quad = \quad \cos(\omega t) + i\,\mathrm{sen}\,(\omega t)$$

e

$$\exp(-i\omega t) \quad = \quad \cos(\omega t) - i \,\mathrm{sen}\,(\omega t)\,,$$

obtemos

$$\exp(i\omega t) + \exp(-i\omega t) \quad = \quad 2\cos(\omega t)\,,$$

isto é,

$$\cos(\omega t) \quad = \quad \frac{\exp(i\omega t) + \exp(-i\omega t)}{2}.$$

Subtraindo

$$\exp(-i\omega t) \quad = \quad \cos(\omega t) - i \,\mathrm{sen}\,(\omega t)$$

de

$$\exp(i\omega t) \quad = \quad \cos(\omega t) + i \,\mathrm{sen}\,(\omega t)\,,$$

vem

$$\exp(i\omega t) - \exp(-i\omega t) \quad = \quad 2i \,\mathrm{sen}\,(\omega t)\,,$$

isto é,

$$\mathrm{sen}\,(\omega t) \quad = \quad \frac{\exp(i\omega t) - \exp(-i\omega t)}{2i}.$$

Agora você sabe como expressar seno e cosseno em termos de exponenciais de Euler e, reciprocamente, você entende o que significa a exponencial complexa. Na verdade, podemos escrever a exponencial complexa mais geral da seguinte forma:

$$\exp(a+bi) \quad = \quad \exp(a)\exp(bi) = \exp(a)\exp(ib) = \exp(a)\left[\cos(b) + i \,\mathrm{sen}\,(b)\right],$$

onde a e b são números reais. Note que podemos escrever

$$\exp(ib) \quad = \quad \cos(b) + i \,\mathrm{sen}\,(b)$$

partindo de

$$\exp(i\omega t) \quad = \quad \cos(\omega t) + i \,\mathrm{sen}\,(\omega t)\,,$$

pois, como ωt é arbitrário, sempre podemos escolher $\omega t = b$ e segue a expressão acima para qualquer b real:

$$\exp(ib) \quad = \quad \cos(b) + i \,\mathrm{sen}\,(b)\,.$$

Outra propriedade muito interessante decorre da expressão para a n-ésima potência de $\exp(ib)$:

$$[\exp(ib)]^n = [\cos(b) + i \operatorname{sen}(b)]^n .$$

No entanto, também é verdade que

$$[\exp(ib)]^n = \exp(nib) = \cos(nb) + i \operatorname{sen}(nb)$$

e, portanto,

$$[\cos(b) + i \operatorname{sen}(b)]^n = \cos(nb) + i \operatorname{sen}(nb) .$$

Essa é a fórmula de de Moivre. Bacana, né?