Massa reduzida

A massa do Sol é muito maior do que a massa de todos os planetas juntos e, portanto, podemos supor que todos os planetas giram em torno do centro do Sol sem errar muito. Mas e quando temos duas estrelas, uma orbitando a outra, com massas da mesma ordem de grandeza? Não deveríamos modificar toda a teoria para tratar um problema assim? A resposta é negativa, pois não há necessidade de outra teoria se tomarmos os cuidados necessários. Para vermos como podemos tratar um problema em que ambas as partículas de massas m_1 e m_2 podem mover-se, escrevamos as forças que cada uma faz sobre a outra:

$$\mathbf{F}_{1\to 2} = -G\frac{m_1 m_2}{|\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1|^3}\left(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1\right)$$

e

$$\mathbf{F}_{2\to 1} = -G\frac{m_2 m_1}{|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2|^3}\left(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2\right) = -\mathbf{F}_{1\to 2} = G\frac{m_1 m_2}{|\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1|^3}\left(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1\right).$$

Da segunda lei de Newton seguem as equações:

$$\mathbf{F}_{1\to 2} = m_2\frac{d^2\mathbf{r}_2}{dt^2}$$

e

$$\mathbf{F}_{2\to 1} = m_1\frac{d^2\mathbf{r}_1}{dt^2}.$$

Então agora temos um sistema de duas equações de movimento vetoriais para resolver:

$$m_2\frac{d^2\mathbf{r}_2}{dt^2} = -G\frac{m_1 m_2}{|\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1|^3}\left(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1\right)$$

e

$$m_1\frac{d^2\mathbf{r}_1}{dt^2} = G\frac{m_1 m_2}{|\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1|^3}\left(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1\right).$$

Essas duas equações estão acopladas, pois a que envolve a aceleração da partícula de massa m_2 depende das coordenadas da partícula de massa m_1 e vice-versa. Tem como desacoplá-las? Sim, tem. Primeiro, note o que acontece quando somamos membro a membro ambas as equações:

$$m_2\frac{d^2\mathbf{r}_2}{dt^2} + m_1\frac{d^2\mathbf{r}_1}{dt^2} = \mathbf{0}.$$

Em outras palavras, também podemos escrever essa equação assim:

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(m_2\mathbf{r}_2 + m_1\mathbf{r}_1\right) = \mathbf{0},$$

pois as massas não dependem do tempo. Recorde-se que o vetor posição do centro de massa das duas partículas é dada por

$$\mathbf{R} = \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2}{m_1 + m_2}.$$

Com isso em mente, podemos multiplicar e dividir por $(m_1 + m_2)$ e escrever

$$(m_1 + m_2)\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{m_2\mathbf{r}_2 + m_1\mathbf{r}_1}{m_1 + m_2}\right) = \mathbf{0},$$

ou seja,

$$(m_1 + m_2)\frac{d^2\mathbf{R}}{dt^2} = \mathbf{0},$$

ou ainda,

$$\frac{d^2\mathbf{R}}{dt^2} = \mathbf{0}.$$

Assim, o centro de massa desse sistema de duas partículas descreve um movimento uniforme; a resultante de força gravitacional sobre o centro de massa é nula.

Outra coisa que podemos fazer com as duas equações de movimento acima, isto é,

$$m_2\frac{d^2\mathbf{r}_2}{dt^2} = -G\frac{m_1 m_2}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3}(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)$$

e

$$m_1\frac{d^2\mathbf{r}_1}{dt^2} = G\frac{m_1 m_2}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3}(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1),$$

é cancelar as massas que aparecem em seus membros esquerdos, assim:

$$\frac{d^2\mathbf{r}_2}{dt^2} = -G\frac{m_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3}(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)$$

e

$$\frac{d^2\mathbf{r}_1}{dt^2} = G\frac{m_2}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3}(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1).$$

Podemos agora subtrair a segunda dessas equações da primeira e o resultado dá:

$$\frac{d^2}{dt^2}(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) = -G\frac{(m_1 + m_2)}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3}(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1).$$

Essa é uma equação vetorial para o vetor diferença, $\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$, que podemos chamar de $\mathbf{r}$:

$$\mathbf{r} \quad = \quad \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1.$$

Esse vetor também dá a posição da partícula de massa m_2 relativamente à posição da partícula de massa m_1 e, portanto, também é chamado de vetor das coordenadas relativas. A equação de movimento para esse vetor pode ser expressa em termos da força que partícula de massa m_1 faz sobre a partícula de massa m_2 da seguinte forma:

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \quad = \quad \frac{d^2}{dt^2}(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) = -G\frac{(m_1 + m_2)}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3}(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) = \left(\frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2}\right)\left[-G\frac{m_1 m_2}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3}(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)\right],$$

isto é,

$$\left(\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\right)\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \quad = \quad \mathbf{F}_{1\to 2}.$$

Seja

$$\mu \quad = \quad \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} = \frac{1}{\frac{m_1}{m_1 m_2} + \frac{m_2}{m_1 m_2}} = \frac{1}{\frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_1}}.$$

Essa constante tem dimensão de massa e é, portanto, chamada de massa reduzida do sistema de duas massas. Outra maneira de expressar a relação entre μ e as massas m_1 e m_2 é

$$\frac{1}{\mu} \quad = \quad \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}.$$

Assim, a equação de movimento para o vetor posição relativa fica

$$\mu\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \quad = \quad \mathbf{F}_{1\to 2}.$$

Essa equação mostra que o problema de duas partículas pode ser tratado matematicamente como se fosse o problema de uma partícula de massa μ orbitando a origem sob a ação da força central $\mathbf{F}_{1\to 2}$.