A Reação da Radiação

Uma partícula carregada emite radiação de energia, momentum e momentum angular quando acelerada e, portanto, sofre uma força de reação à emissão radiativa. Abraham, em 1903, e Lorentz, em 1904, propuseram uma teoria em que o momentum de uma partícula carregada tem origem completamente eletromagnética. Assim, a lei de conservação de momentum linear envolvendo campos e matéria, na teoria de Abraham-Lorentz, não apresenta o termo com momentum mecânico, apenas o termo envolvendo o momentum eletromagnético. Como os campos nessa lei são os campos totais presentes em uma região V, na ausência de momentum mecânico, a lei é equivalente a

$$\int_V d^3r \left[\rho(\mathbf{r},t)\,\mathbf{E}(\mathbf{r},t) + \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r},t)}{c} \times \mathbf{B}(\mathbf{r},t)\right] = \mathbf{0}.$$

Devemos lembrar que o balanço de momentum foi obtido igualando essa equação à variação do momentum mecânico da matéria dentro da região V. Agora, a região V será tomada como o interior de uma partícula de carga total q, uniformemente distribuída. Além disso, V será tomada como uma esfera de raio R_0. Os campos totais podem ser decompostos em uma contribuição da própria partícula e de fontes externas à distribuição de carga em V. A força externa sobre a partícula é, portanto, escrita como

$$\mathbf{F}_{\text{ext}} = \int_V d^3r \left[\rho(\mathbf{r},t)\,\mathbf{E}_{\text{ext}}(\mathbf{r},t) + \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r},t)}{c} \times \mathbf{B}_{\text{ext}}(\mathbf{r},t)\right],$$

onde $\mathbf{E}_{\text{ext}}(\mathbf{r},t)$ e $\mathbf{B}_{\text{ext}}(\mathbf{r},t)$ são os campos externos à partícula. Para uma partícula localizada em uma região em que os campos externos variam muito pouco, podemos escrever

$$\mathbf{F}_{\text{ext}} = q\mathbf{E}_{\text{ext}}(\mathbf{r},t) + \frac{q}{c}\mathbf{v} \times \mathbf{B}_{\text{ext}}(\mathbf{r},t).$$

Os campos devidos à própria partícula serão denotados por $\mathbf{E}_{\text{part}}(\mathbf{r},t)$ e $\mathbf{B}_{\text{part}}(\mathbf{r},t)$. Portanto, podemos escrever:

$$\mathbf{F}_{\text{ext}} = -\int_V d^3r \left[\rho(\mathbf{r},t)\,\mathbf{E}_{\text{part}}(\mathbf{r},t) + \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r},t)}{c} \times \mathbf{B}_{\text{part}}(\mathbf{r},t)\right],$$

já que não há momentum mecânico atribuído à partícula nessa teoria. Tomemos a partícula como instantaneamente em repouso no instante t. Então,

$$\mathbf{F}_{\text{ext}} = -\int_V d^3r \left[\rho(\mathbf{r},t)\,\mathbf{E}_{\text{part}}(\mathbf{r},t)\right].$$

O campo $\mathbf{E}_{\text{part}}$, no interior V da partícula de carga total q, pode ser visto como a superposição de cada elemento de campo $d\mathbf{E}_{\text{part}}$ produzido por cada elemento de carga $\rho(\mathbf{r}',t)\,d^3r'$ da partícula. Estaremos sempre supondo que cada elemento de carga tenha sempre a mesma velocidade $\dot{\mathbf{r}}_0(t)$, em cada instante de tempo t, pois a hipótese é de uma distribuição de carga esférica rígida. Fixemos o instante de tempo t, quando a partícula está em repouso com relação ao referencial do laboratório e, portanto,

$$\dot{\mathbf{r}}_0\left(t\right) \quad = \quad \mathbf{0},$$

no instante fixo t, mas não necessariamente em outros instantes. Nesse instante de tempo fixo, podemos escrever

$$\mathbf{E}_{\text{part}}\left(\mathbf{r},t\right) \quad = \quad \int_V d\mathbf{E}_{\text{part}}\left(\mathbf{r},t\right).$$

O campo elementar $d\mathbf{E}_{\text{part}}\left(\mathbf{r},t\right)$, produzido por um elemento de carga $\rho\left(\mathbf{r}',t\right)d^3r'$ que descreve uma trajetória $\mathbf{r}' = \mathbf{r}'\left(t\right)$ é deduzido a partir dos potenciais de Liénard-Wiechert e o resultado é

$$\begin{aligned} d\mathbf{E}_{\text{part}}\left(\mathbf{r},t\right) \quad &= \quad d^3r'\rho\left(\mathbf{r}',t\right)\left[\frac{\left(\hat{\mathbf{R}}\left(t_{\text{ret}}\right)-\boldsymbol{\beta}\left(t_{\text{ret}}\right)\right)\left(1-\left(\beta\left(t_{\text{ret}}\right)\right)^2\right)}{\left(R\left(t_{\text{ret}}\right)\right)^2\left(1-\hat{\mathbf{R}}\left(t_{\text{ret}}\right)\cdot\boldsymbol{\beta}\left(t_{\text{ret}}\right)\right)^3}\right. \\ &+ \quad \left.\frac{\hat{\mathbf{R}}\left(t_{\text{ret}}\right)\times\left[\left(\hat{\mathbf{R}}\left(t_{\text{ret}}\right)-\boldsymbol{\beta}\left(t_{\text{ret}}\right)\right)\times\mathbf{a}\left(t_{\text{ret}}\right)\right]}{R\left(t_{\text{ret}}\right)c^2\left(1-\hat{\mathbf{R}}\left(t_{\text{ret}}\right)\cdot\boldsymbol{\beta}\left(t_{\text{ret}}\right)\right)^3}\right], \end{aligned}$$

onde

$$\mathbf{R}\left(t_{\text{ret}}\right) \quad = \quad \mathbf{r}-\mathbf{r}'\left(t_{\text{ret}}\right),$$

$$t_{\text{ret}} \quad = \quad t-\frac{\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\left(t_{\text{ret}}\right)\right|}{c},$$

$$R\left(t_{\text{ret}}\right) \quad = \quad \left|\mathbf{R}\left(t_{\text{ret}}\right)\right|,$$

$$\hat{\mathbf{R}}\left(t_{\text{ret}}\right) \quad = \quad \frac{\mathbf{R}\left(t_{\text{ret}}\right)}{R\left(t_{\text{ret}}\right)},$$

$$\begin{aligned} \mathbf{v}\left(t_{\text{ret}}\right) \quad &= \quad \frac{d\mathbf{r}'\left(t_{\text{ret}}\right)}{dt_{\text{ret}}} \\ &= \quad \dot{\mathbf{r}}_0\left(t_{\text{ret}}\right), \end{aligned}$$

$$\boldsymbol{\beta}\left(t_{\text{ret}}\right) \quad = \quad \frac{\mathbf{v}\left(t_{\text{ret}}\right)}{c}$$

e

$$\beta\left(t_{\text{ret}}\right) \quad = \quad \left|\boldsymbol{\beta}\left(t_{\text{ret}}\right)\right|.$$

Para o cálculo do campo elétrico no interior da partícula de raio R_0, vemos que t_{ret} difere de t por um intervalo de tempo não maior do que R_0/c, que dá a ordem de grandeza do tempo que leva para um sinal luminoso cruzar a partícula. Como a partícula é um modelo para o elétron, R_0 será tomado como muito pequeno e R_0/c será suposto como um intervalo de tempo curto o suficiente para que a posição, a velocidade, a aceleração e outras derivadas superiores da posição da partícula não tenham sido alteradas apreciavelmente. Em outras palavras, vamos supor que

$$\begin{aligned}
\beta &\ll 1, \\
|\mathbf{a}| &\ll \frac{|\mathbf{v}|\, c}{R_0} \ll \frac{c^2}{R_0}, \\
|\dot{\mathbf{a}}| &\ll \frac{|\mathbf{a}|\, c}{R_0} \ll \frac{c^3}{R_0^2}, \\
|\ddot{\mathbf{a}}\,(t)| &\ll \left|\frac{\dot{\mathbf{a}}\,(t)\, c}{R_0}\right| \ll \frac{c^4}{R_0^3},
\end{aligned}$$

etc., para todo instante de tempo. Consideremos uma função qualquer de t_{ret}, $f\,(t_{\mathrm{ret}})$. Então, podemos expandir

$$f\,(t_{\mathrm{ret}}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!c^n} \left[R\,(t_{\mathrm{ret}})\right]^n \frac{\partial^n f\,(t)}{\partial t^n}.$$

Em especial, até ordem $1/c^3$,

$$\begin{aligned}
R\,(t_{\mathrm{ret}}) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!c^n} \left[R\,(t_{\mathrm{ret}})\right]^n \frac{\partial^n R\,(t)}{\partial t^n} \\
&\approx R\,(t) - \frac{R\,(t_{\mathrm{ret}})}{c} \frac{\partial R\,(t)}{\partial t} + \frac{1}{2c^2} \left[R\,(t_{\mathrm{ret}})\right]^2 \frac{\partial^2 R\,(t)}{\partial t^2} - \frac{1}{6c^3} \left[R\,(t_{\mathrm{ret}})\right]^3 \frac{\partial^3 R\,(t)}{\partial t^3}.
\end{aligned}$$

Mas,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial R\,(t')}{\partial t'} &= \frac{\partial}{\partial t'} \left|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\,(t')\right| \\
&= \frac{\partial}{\partial t'} \sqrt{\left[\mathbf{r} - \mathbf{r}'\,(t')\right] \cdot \left[\mathbf{r} - \mathbf{r}'\,(t')\right]} \\
&= -\frac{1}{R\,(t')} \left[\mathbf{r} - \mathbf{r}'\,(t')\right] \cdot \frac{\partial \mathbf{r}'\,(t')}{\partial t'} \\
&= -\hat{\mathbf{R}}\,(t') \cdot \mathbf{v}\,(t')\,.
\end{aligned}$$

Em particular, porque $\mathbf{v}\,(t) = \mathbf{0}$,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial R\,(t)}{\partial t} &= -\hat{\mathbf{R}}\,(t) \cdot \mathbf{v}\,(t) \\
&= 0
\end{aligned}$$

e, portanto,

$$R(t_{\rm ret}) \approx R(t) + \frac{1}{2c^2}\left[R(t_{\rm ret})\right]^2 \frac{\partial^2 R(t)}{\partial t^2} - \frac{1}{6c^3}\left[R(t_{\rm ret})\right]^3 \frac{\partial^3 R(t)}{\partial t^3}.$$

Iterando essa expressão e mantendo termos até ordem $1/c^3$, obtemos

$$\begin{aligned} R(t_{\rm ret}) &\approx R(t) + \frac{1}{2c^2}\left[R(t) + \frac{1}{2c^2}\left[R(t_{\rm ret})\right]^2 \frac{\partial^2 R(t)}{\partial t^2} - \frac{1}{6c^3}\left[R(t_{\rm ret})\right]^3 \frac{\partial^3 R(t)}{\partial t^3} + \ldots\right]^2 \frac{\partial^2 R(t)}{\partial t^2} \\ &- \frac{1}{6c^3}\left[R(t) + \frac{1}{2c^2}\left[R(t_{\rm ret})\right]^2 \frac{\partial^2 R(t)}{\partial t^2} - \frac{1}{6c^3}\left[R(t_{\rm ret})\right]^3 \frac{\partial^3 R(t)}{\partial t^3} + \ldots\right]^3 \frac{\partial^3 R(t)}{\partial t^3}, \end{aligned}$$

isto é,

$$R(t_{\rm ret}) \approx R(t) + \frac{1}{2c^2}\left[R(t)\right]^2 \frac{\partial^2 R(t)}{\partial t^2} - \frac{1}{6c^3}\left[R(t)\right]^3 \frac{\partial^3 R(t)}{\partial t^3}.$$

Mas,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 R(t')}{\partial t'^2} &= \frac{\partial}{\partial t'}\left[-\frac{\mathbf{R}(t')\cdot\mathbf{v}(t')}{R(t')}\right] \\ &= \frac{\mathbf{R}(t')\cdot\mathbf{v}(t')}{\left[R(t')\right]^2}\frac{\partial R(t')}{\partial t'} - \frac{1}{R(t')}\left[\frac{\partial \mathbf{R}(t')}{\partial t'}\right]\cdot\mathbf{v}(t') - \frac{\mathbf{R}(t')\cdot\mathbf{a}(t')}{R(t')} \\ &= -\frac{\left[\mathbf{R}(t')\cdot\mathbf{v}(t')\right]^2}{\left[R(t')\right]^3} + \frac{\left[\mathbf{v}(t')\right]^2}{R(t')} - \frac{\mathbf{R}(t')\cdot\mathbf{a}(t')}{R(t')} \end{aligned}$$

e, assim,

$$\frac{\partial^2 R(t)}{\partial t^2} = -\frac{\mathbf{R}(t)\cdot\mathbf{a}(t)}{R(t)}.$$

De forma análoga, podemos calcular

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 R(t')}{\partial t'^3} &= \frac{\partial}{\partial t'}\left[-\frac{\left[\mathbf{R}(t')\cdot\mathbf{v}(t')\right]^2}{\left[R(t')\right]^3} + \frac{\left[\mathbf{v}(t')\right]^2}{R(t')} - \frac{\mathbf{R}(t')\cdot\mathbf{a}(t')}{R(t')}\right] \\ &- \frac{3\left[\mathbf{R}(t')\cdot\mathbf{v}(t')\right]^3}{\left[R(t')\right]^5} + \frac{\mathbf{R}(t')\cdot\mathbf{v}(t')}{\left[R(t')\right]^3}\left[\mathbf{v}(t')\right]^2 - \frac{3\mathbf{R}(t')\cdot\mathbf{v}(t')\,\mathbf{R}(t')\cdot\mathbf{a}(t')}{\left[R(t')\right]^3} + \frac{3\mathbf{v}(t')\cdot\mathbf{a}(t')}{R(t')} \\ &- \frac{\mathbf{R}(t')\cdot\dot{\mathbf{a}}(t')}{R(t')} \end{aligned}$$

e, com isso,

$$\frac{\partial^3 R(t)}{\partial t^3} = -\frac{\mathbf{R}(t)\cdot\dot{\mathbf{a}}(t)}{R(t)}.$$

Logo,

$$R(t_{\rm ret}) \approx R(t) - \frac{R(t)\,\mathbf{R}(t)\cdot\mathbf{a}(t)}{2c^2} + \frac{\left[R(t)\right]^2\mathbf{R}(t)\cdot\dot{\mathbf{a}}(t)}{6c^3}.$$

Assim, usando como notação

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\beta} &= \boldsymbol{\beta}(t), \\
\mathbf{a} &= \mathbf{a}(t), \\
\dot{\mathbf{a}} &= \dot{\mathbf{a}}(t), \\
\mathbf{R} &= \mathbf{R}(t_{\mathrm{ret}}), \\
\hat{\mathbf{R}} &= \hat{\mathbf{R}}(t_{\mathrm{ret}}), \\
R &= R(t_{\mathrm{ret}})
\end{aligned}$$

e

$$\ddot{\mathbf{a}} = \ddot{\mathbf{a}}(t),$$

obtemos

$$\dot{\mathbf{a}}(t_{\mathrm{ret}}) \approx \dot{\mathbf{a}} - \frac{R}{c}\ddot{\mathbf{a}},$$

já que, por hipótese,

$$\left|\frac{R}{c}\ddot{\mathbf{a}}\right| \ll \left|\frac{R}{c}\frac{\dot{\mathbf{a}}c}{R_0}\right| < |\dot{\mathbf{a}}|,$$

pois, obviamente,

$$R < R_0.$$

De forma análoga, também temos

$$\mathbf{v}(t_{\mathrm{ret}}) \approx -\frac{R}{c}\mathbf{a} + \frac{1}{2}\frac{R^2}{c^2}\dot{\mathbf{a}},$$

pois estamos supondo que, no instante fixo t,

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{0}$$

e

$$|\dot{\mathbf{a}}| \ll \left|\frac{\mathbf{a}c}{R_0}\right|,$$

isto é,

$$\left|\frac{R^2}{c^2}\dot{\mathbf{a}}\right| \ll \left|\frac{R^2}{c^2}\frac{\mathbf{a}c}{R_0}\right| < \left|\frac{R}{c}\mathbf{a}\right|.$$

Agora temos o denominador:

$$\begin{aligned}\left[1-\hat{\mathbf{R}}\cdot\boldsymbol{\beta}\left(t_{\text{ret}}\right)\right]^{-3} &= R^{3}\left[R-\mathbf{R}\cdot\boldsymbol{\beta}\left(t_{\text{ret}}\right)\right]^{-3} \\ &\approx R^{3}\left[R-\frac{\mathbf{R}}{c}\cdot\mathbf{v}\left(t_{\text{ret}}\right)\right]^{-3}.\end{aligned}$$

Usando o resultado acima,

$$\mathbf{v}\left(t_{\text{ret}}\right) \approx -\frac{R}{c}\mathbf{a}+\frac{1}{2}\frac{R^{2}}{c^{2}}\dot{\mathbf{a}},$$

vem

$$\begin{aligned}\left[1-\hat{\mathbf{R}}\cdot\boldsymbol{\beta}\left(t_{\text{ret}}\right)\right]^{-3} &\approx \left[1+\frac{\mathbf{R}\cdot\mathbf{a}}{c^{2}}-\frac{R}{2}\frac{\mathbf{R}\cdot\dot{\mathbf{a}}}{c^{3}}\right]^{-3} \\ &\approx 1-3\frac{\mathbf{R}\cdot\mathbf{a}}{c^{2}}+\frac{3R}{2}\frac{\mathbf{R}\cdot\dot{\mathbf{a}}}{c^{3}}.\end{aligned}$$

Vamos considerar termos até a ordem $1/c^3$. Na expressão do campo elétrico, aparece o termo

$$\frac{\left(\hat{\mathbf{R}}-\boldsymbol{\beta}\left(t_{\text{ret}}\right)\right)\left(1-\left(\beta\left(t_{\text{ret}}\right)\right)^{2}\right)}{R^{2}\left(1-\hat{\mathbf{R}}\cdot\boldsymbol{\beta}\left(t_{\text{ret}}\right)\right)^{3}} = \frac{\left(\mathbf{R}-R\boldsymbol{\beta}\left(t_{\text{ret}}\right)\right)\left(1-\left(\beta\left(t_{\text{ret}}\right)\right)^{2}\right)}{R^{3}\left(1-\hat{\mathbf{R}}\cdot\boldsymbol{\beta}\left(t_{\text{ret}}\right)\right)^{3}}.$$

Com as aproximações acima, segue

$$\mathbf{R}-R\boldsymbol{\beta}\left(t_{\text{ret}}\right) \approx \mathbf{R}+\frac{R^{2}}{c^{2}}\mathbf{a}-\frac{1}{2}\frac{R^{3}}{c^{3}}\dot{\mathbf{a}}$$

e, também, até ordem $1/c^3$,

$$\begin{aligned}\frac{\left(\mathbf{R}-R\boldsymbol{\beta}\left(t_{\text{ret}}\right)\right)}{R^{3}\left(1-\hat{\mathbf{R}}\cdot\boldsymbol{\beta}\left(t_{\text{ret}}\right)\right)^{3}} &\approx \left(\frac{\mathbf{R}}{R^{3}}+\frac{\mathbf{a}}{Rc^{2}}-\frac{\dot{\mathbf{a}}}{2c^{3}}\right)\left(1-3\frac{\mathbf{R}\cdot\mathbf{a}}{c^{2}}+\frac{3R}{2}\frac{\mathbf{R}\cdot\dot{\mathbf{a}}}{c^{3}}\right) \\ &= \frac{\mathbf{R}}{R^{3}}+\frac{\mathbf{a}}{Rc^{2}}-\frac{\dot{\mathbf{a}}}{2c^{3}}-3\frac{\mathbf{R}\mathbf{R}\cdot\mathbf{a}}{R^{3}c^{2}}+\frac{3\mathbf{R}\mathbf{R}\cdot\dot{\mathbf{a}}}{2R^{2}c^{3}}.\end{aligned}$$

Notemos que desprezamos $\left[\boldsymbol{\beta}\left(t_{\text{ret}}\right)\right]^{2}$ porque

$$\left[\boldsymbol{\beta}\left(t_{\text{ret}}\right)\right]^{2} \approx \frac{1}{c^{2}}\left[-\frac{R}{c}\mathbf{a}+\frac{1}{2}\frac{R^{2}}{c^{2}}\dot{\mathbf{a}}\right]^{2},$$

que é da ordem de $1/c^4$. O outro termo do campo elétrico é

$$\begin{aligned}\frac{\hat{\mathbf{R}}\times\left[\left(\hat{\mathbf{R}}-\boldsymbol{\beta}\left(t_{\text{ret}}\right)\right)\times\mathbf{a}\left(t_{\text{ret}}\right)\right]}{Rc^{2}\left(1-\hat{\mathbf{R}}\cdot\boldsymbol{\beta}\left(t_{\text{ret}}\right)\right)^{3}} &= \frac{\mathbf{R}\mathbf{R}\cdot\mathbf{a}\left(t_{\text{ret}}\right)}{R^{3}c^{2}\left(1-\hat{\mathbf{R}}\cdot\boldsymbol{\beta}\left(t_{\text{ret}}\right)\right)^{3}}-\frac{R\mathbf{v}\left(t_{\text{ret}}\right)\mathbf{R}\cdot\mathbf{a}\left(t_{\text{ret}}\right)}{R^{3}c^{3}\left(1-\hat{\mathbf{R}}\cdot\boldsymbol{\beta}\left(t_{\text{ret}}\right)\right)^{3}} \\ &- \frac{R^{2}\mathbf{a}\left(t_{\text{ret}}\right)}{R^{3}c^{2}\left(1-\hat{\mathbf{R}}\cdot\boldsymbol{\beta}\left(t_{\text{ret}}\right)\right)^{3}}+\frac{R\mathbf{R}\cdot\boldsymbol{\beta}\left(t_{\text{ret}}\right)\mathbf{a}\left(t_{\text{ret}}\right)}{R^{3}c^{2}\left(1-\hat{\mathbf{R}}\cdot\boldsymbol{\beta}\left(t_{\text{ret}}\right)\right)^{3}}.\end{aligned}$$

Calculemos cada um até ordem $1/c^3$:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathbf{R}\mathbf{R}\cdot\mathbf{a}\left(t_{\text{ret}}\right)}{R^3c^2\left(1-\hat{\mathbf{R}}\cdot\boldsymbol{\beta}\left(t_{\text{ret}}\right)\right)^3} &\approx \frac{\mathbf{R}}{R^3c^2}\left(\mathbf{R}\cdot\mathbf{a}-\frac{R}{c}\mathbf{R}\cdot\dot{\mathbf{a}}\right)\left(1-3\frac{\mathbf{R}\cdot\mathbf{a}}{c^2}+\frac{3R}{2}\frac{\mathbf{R}\cdot\dot{\mathbf{a}}}{c^3}\right)\\
&\approx \frac{\mathbf{R}\mathbf{R}\cdot\mathbf{a}}{R^3c^2}-\frac{\mathbf{R}\mathbf{R}\cdot\dot{\mathbf{a}}}{R^2c^3},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-\frac{R\mathbf{v}\left(t_{\text{ret}}\right)\mathbf{R}\cdot\mathbf{a}\left(t_{\text{ret}}\right)}{R^3c^3\left(1-\hat{\mathbf{R}}\cdot\boldsymbol{\beta}\left(t_{\text{ret}}\right)\right)^3} &\approx -\frac{1}{R^2c^3}\left(-\frac{R}{c}\mathbf{a}+\frac{1}{2}\frac{R}{c^2}^2\dot{\mathbf{a}}\right)\left(\mathbf{R}\cdot\mathbf{a}-\frac{R}{c}\mathbf{R}\cdot\dot{\mathbf{a}}\right)\\
&\approx \mathbf{0},
\end{aligned}$$

$$-\frac{R^2\mathbf{a}\left(t_{\text{ret}}\right)}{R^3c^2\left(1-\hat{\mathbf{R}}\cdot\boldsymbol{\beta}\left(t_{\text{ret}}\right)\right)^3} \approx -\frac{\mathbf{a}}{Rc^2}+\frac{\dot{\mathbf{a}}}{c^3}$$

e

$$\begin{aligned}
\frac{R\mathbf{R}\cdot\boldsymbol{\beta}\left(t_{\text{ret}}\right)\mathbf{a}\left(t_{\text{ret}}\right)}{R^3c^2\left(1-\hat{\mathbf{R}}\cdot\boldsymbol{\beta}\left(t_{\text{ret}}\right)\right)^3} &\approx \frac{\mathbf{a}}{R^2c^3}\mathbf{R}\cdot\left(-\frac{R}{c}\mathbf{a}+\frac{1}{2}\frac{R}{c^2}^2\dot{\mathbf{a}}\right)\\
&\approx \mathbf{0}.
\end{aligned}$$

Assim, obtemos

$$\begin{aligned}
d\mathbf{E}_{\text{part}}\left(\mathbf{r},t\right) &\approx d^3r'\rho\left(\mathbf{r}',t\right)\left(\frac{\mathbf{R}}{R^3}+\frac{\mathbf{a}}{Rc^2}-\frac{\dot{\mathbf{a}}}{2c^3}-3\frac{\mathbf{R}\mathbf{R}\cdot\mathbf{a}}{R^3c^2}+\frac{3\mathbf{R}\mathbf{R}\cdot\dot{\mathbf{a}}}{2R^2c^3}+\frac{\mathbf{R}\mathbf{R}\cdot\mathbf{a}}{R^3c^2}-\frac{\mathbf{R}\mathbf{R}\cdot\dot{\mathbf{a}}}{R^2c^3}-\frac{\mathbf{a}}{Rc^2}+\frac{\dot{\mathbf{a}}}{c^3}\right)\\
&\approx d^3r'\rho\left(\mathbf{r}',t\right)\left[\frac{\mathbf{R}}{R^3}-2\frac{\mathbf{R}\mathbf{R}\cdot\mathbf{a}}{R^3c^2}+\frac{\mathbf{R}\mathbf{R}\cdot\dot{\mathbf{a}}}{2R^2c^3}+\frac{\dot{\mathbf{a}}}{2c^3}\right].
\end{aligned}$$

A partir de agora, para não termos que lidar com $\mathbf{R}$ calculado em t_{ret}, utilizaremos a expressão aproximada que deduzimos acima, isto é,

$$R\left(t_{\text{ret}}\right) \approx R\left(t\right)-\frac{R\left(t\right)\mathbf{R}\left(t\right)\cdot\mathbf{a}\left(t\right)}{2c^2}+\frac{\left[R\left(t\right)\right]^2\mathbf{R}\left(t\right)\cdot\dot{\mathbf{a}}\left(t\right)}{6c^3}.$$

Também devemos utilizar

$$\mathbf{R}\left(t_{\text{ret}}\right) \approx \mathbf{R}\left(t\right)+\frac{1}{2c^2}\left[R\left(t_{\text{ret}}\right)\right]^2\frac{\partial^2\mathbf{R}\left(t\right)}{\partial t^2}-\frac{1}{6c^3}\left[R\left(t_{\text{ret}}\right)\right]^3\frac{\partial^3\mathbf{R}\left(t\right)}{\partial t^3},$$

que, com a aproximação para $R\left(t_{\text{ret}}\right)$ acima e mantendo termos até ordem $1/c^3$, pode ser escrita como

$$\mathbf{R}\left(t_{\text{ret}}\right) \approx \mathbf{R}\left(t\right)+\frac{1}{2c^2}\left[R\left(t\right)\right]^2\frac{\partial^2\mathbf{R}\left(t\right)}{\partial t^2}-\frac{1}{6c^3}\left[R\left(t\right)\right]^3\frac{\partial^3\mathbf{R}\left(t\right)}{\partial t^3}$$

e, portanto,

$$\mathbf{R}\left(t_{\mathrm{ret}}\right) \approx \mathbf{R}\left(t\right)-\frac{1}{2c^{2}}\left[R\left(t\right)\right]^{2}\mathbf{a}\left(t\right)+\frac{1}{6c^{3}}\left[R\left(t\right)\right]^{3}\dot{\mathbf{a}}\left(t\right).$$

Em especial, o termo de Coulomb escreve-se, até ordem $1/c^3$,

$$\begin{aligned}
\frac{\mathbf{R}}{R^{3}} &\approx \left\{\frac{\mathbf{R}\left(t\right)}{\left[R\left(t\right)\right]^{3}}-\frac{\mathbf{a}\left(t\right)}{2c^{2}R\left(t\right)}+\frac{\dot{\mathbf{a}}\left(t\right)}{6c^{3}}\right\}\left\{1-\frac{\mathbf{R}\left(t\right)\cdot\mathbf{a}\left(t\right)}{2c^{2}}+\frac{R\left(t\right)\mathbf{R}\left(t\right)\cdot\dot{\mathbf{a}}\left(t\right)}{6c^{3}}\right\}^{-3}\\
&\approx \left\{\frac{\mathbf{R}\left(t\right)}{\left[R\left(t\right)\right]^{3}}-\frac{\mathbf{a}\left(t\right)}{2c^{2}R\left(t\right)}+\frac{\dot{\mathbf{a}}\left(t\right)}{6c^{3}}\right\}\left\{1+\frac{3\mathbf{R}\left(t\right)\cdot\mathbf{a}\left(t\right)}{2c^{2}}-\frac{R\left(t\right)\mathbf{R}\left(t\right)\cdot\dot{\mathbf{a}}\left(t\right)}{2c^{3}}\right\}\\
&\approx \frac{\mathbf{R}\left(t\right)}{\left[R\left(t\right)\right]^{3}}+\frac{3\mathbf{R}\left(t\right)\mathbf{R}\left(t\right)\cdot\mathbf{a}\left(t\right)}{2c^{2}\left[R\left(t\right)\right]^{3}}-\frac{\mathbf{R}\left(t\right)\mathbf{R}\left(t\right)\cdot\dot{\mathbf{a}}\left(t\right)}{2c^{3}\left[R\left(t\right)\right]^{2}}-\frac{\mathbf{a}\left(t\right)}{2c^{2}R\left(t\right)}+\frac{\dot{\mathbf{a}}\left(t\right)}{6c^{3}}.
\end{aligned}$$

Assim, a partir de agora, denotaremos:

$$\begin{aligned}
R &= R\left(t\right)\\
&= \left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right|
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\mathbf{R} &= \mathbf{R}\left(t\right)\\
&= \mathbf{r}-\mathbf{r}'.
\end{aligned}$$

Com isso e mantendo termos até ordem $1/c^3$,

$$d\mathbf{E}_{\mathrm{part}}\left(\mathbf{r},t\right) \approx d^{3}r'\rho\left(\mathbf{r}',t\right)\left[\frac{\mathbf{R}}{R^{3}}-\frac{\mathbf{R}\mathbf{R}\cdot\mathbf{a}}{2c^{2}R^{3}}-\frac{\mathbf{a}}{2c^{2}R}+\frac{2\dot{\mathbf{a}}}{3c^{3}}\right],$$

Então, a força externa sobre a partícula agora pode ser escrita como

$$\mathbf{F}_{\mathrm{ext}} = -\int_{V}d^{3}r\int_{V}d^{3}r'\,\rho\left(\mathbf{r},t\right)\rho\left(\mathbf{r}',t\right)\left[\frac{\mathbf{R}}{R^{3}}-\frac{\mathbf{R}\mathbf{R}\cdot\mathbf{a}}{2c^{2}R^{3}}-\frac{\mathbf{a}}{2c^{2}R}+\frac{2\dot{\mathbf{a}}}{3c^{3}}\right].$$

Dada a simetria esférica da distribuição de carga na partícula, podemos tomar a origem no centro da partícula e escrever

$$\rho\left(\mathbf{r},t\right) = \varrho\left(r,t\right)$$

e

$$\rho\left(\mathbf{r}',t\right) = \varrho\left(r',t\right).$$

Também, sem perda de generalidade, podemos tomar o eixo z ao longo do sentido de $\mathbf{a}\left(t\right)$, por exemplo. Assim,

$$\int_{V}d^{3}r\int_{V}d^{3}r'\,\rho\left(\mathbf{r},t\right)\rho\left(\mathbf{r}',t\right)\frac{\mathbf{R}\mathbf{R}\cdot\mathbf{a}}{R^{3}} = a\int_{V}d^{3}r\,\varrho\left(r,t\right)\int_{V}d^{3}r'\,\varrho\left(r',t\right)\left(z-z'\right)\frac{\mathbf{R}}{R^{3}}.$$

A componente x dessa integral dupla pode ser escrita como

$$\int_V d^3r\, \varrho\left(r,t\right) \int_V d^3r'\, \varrho\left(r',t\right) \frac{\left(z-z'\right)\left(x-x'\right)}{R^3},$$

que troca de sinal se trocarmos (x,x') por $(-x,-x')$ e vice-versa. Como a mudança de variáveis de integração não pode alterar o resultado da integral, vemos que essa componente x se anula. Um raciocínio análogo leva à conclusão de que a componente y da integral

$$\int_V d^3r\, \varrho\left(r,t\right) \int_V d^3r'\, \varrho\left(r',t\right)\left(z-z'\right) \frac{\mathbf{R}}{R^3}$$

também se anula, restando apenas a componente z, que não muda de sinal quando trocamos (z,z') por $(-z,-z')$ e vice-versa. Portanto,

$$\int_V d^3r \int_V d^3r'\, \rho\left(\mathbf{r},t\right)\rho\left(\mathbf{r}',t\right) \frac{\mathbf{RR}\cdot\mathbf{a}}{R^3} = \hat{\mathbf{z}}a \int_V d^3r\, \varrho\left(r,t\right) \int_V d^3r'\, \varrho\left(r',t\right) \frac{\left(z-z'\right)^2}{R^3}.$$

Além disso, por causa da simetria esférica, também podemos escrever

$$\begin{aligned}\int_V d^3r\, \varrho\left(r,t\right) \int_V d^3r'\, \varrho\left(r',t\right) \frac{\left(z-z'\right)^2}{R^3} &= \int_V d^3r\, \varrho\left(r,t\right) \int_V d^3r'\, \varrho\left(r',t\right) \frac{\left(x-x'\right)^2}{R^3} \\ &= \int_V d^3r\, \varrho\left(r,t\right) \int_V d^3r'\, \varrho\left(r',t\right) \frac{\left(y-y'\right)^2}{R^3}\end{aligned}$$

e, portanto,

$$\begin{aligned}\int_V d^3r\, \varrho\left(r,t\right) \int_V d^3r'\, \varrho\left(r',t\right) \frac{\left(z-z'\right)^2}{R^3} &= \frac{1}{3}\int_V d^3r\, \varrho\left(r,t\right) \int_V d^3r'\, \varrho\left(r',t\right) \frac{1}{R^3}R^2 \\ &= \frac{1}{3}\int_V d^3r\, \varrho\left(r,t\right) \int_V d^3r'\, \varrho\left(r',t\right) \frac{1}{R}.\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}\int_V d^3r \int_V d^3r'\, \rho\left(\mathbf{r},t\right)\rho\left(\mathbf{r}',t\right) \frac{\mathbf{RR}\cdot\mathbf{a}}{R^3} &= \hat{\mathbf{z}}a\frac{1}{3}\int_V d^3r\, \varrho\left(r,t\right) \int_V d^3r'\, \varrho\left(r',t\right) \frac{1}{R} \\ &= \frac{\mathbf{a}}{3}\int_V d^3r \int_V d^3r' \frac{\rho\left(\mathbf{r},t\right)\rho\left(\mathbf{r}',t\right)}{R}.\end{aligned}$$

Além disso, por causa da simetria esférica, também decorre que

$$\int_V d^3r \int_V d^3r'\, \rho\left(\mathbf{r},t\right)\rho\left(\mathbf{r}',t\right) \frac{\mathbf{R}}{R^3} = \mathbf{0}.$$

Com esses resultados, a força externa aplicada à partícula expressa-se como

$$\mathbf{F}_{\text{ext}} = \frac{4\mathbf{a}}{6c^2}\int_V d^3r \int_V d^3r' \frac{\rho\left(\mathbf{r},t\right)\rho\left(\mathbf{r}',t\right)}{R} - \frac{2q^2\dot{\mathbf{a}}}{3c^3}$$

É importante notarmos que a integral dupla restante no membro direito dessa equação é a energia eletrostática U_0 armazenada na partícula:

$$U_0 = \frac{1}{2}\int_V d^3r \int_V d^3r' \, \frac{\rho\left(\mathbf{r},t\right)\rho\left(\mathbf{r}',t\right)}{R}.$$

Logo,

$$\mathbf{F}_{\text{ext}} = \frac{4U_0}{3c^2}\mathbf{a} - \frac{2q^2}{3c^3}\dot{\mathbf{a}},$$

que é a chamada equação de Abraham-Lorentz. Como vemos, a energia eletrostática armazenada na partícula corresponde a uma massa dada pela relação

$$m_{\text{eletr}} = \frac{U_0}{c^2}$$

e, na presente teoria, o fator $4/3$ indica a inadequação deste tratamento. O termo proporcional à derivada da aceleração descreve a reação radiativa da partícula.

Se, no referencial de repouso da partícula, sua energia fosse dada por U_0, então, como nesse referencial seu momentum seria nulo, em um referencial com velociade relativa $-c\boldsymbol{\beta}$ a partícula deveria ter uma energia γU_0 e momentum $\gamma U_0\boldsymbol{\beta}/c$, como se sua massa de repouso fosse U_0/c^2, sem o fator $4/3$. No cálculo de Abraham-Lorentz acima, a energia de repouso se refere a um referencial diferente do referencial do laboratório, que é o referencial do campo elétrico utilizado nos cálculos acima. O cuidado necessário com as devidas transformações de Lorentz elimina o erro, mas essa é outra história que ainda não contei.