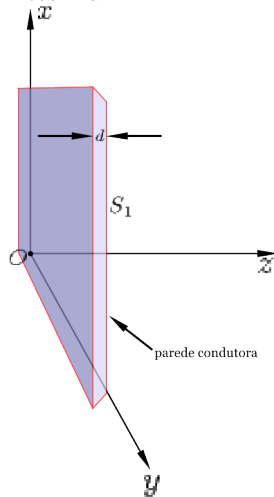


Teoria Vetorial da Difração

Depois de termos visto a teoria escalar da difração, de forma didática, vamos formular uma teoria vetorial de difração para ondas eletromagnéticas. Teremos que tomar cuidado com as inconsistências que podem aparecer, no caso vetorial, envolvendo as condições de contorno que os campos devem satisfazer. Aqui vamos seguir o livro de J. D. Jackson e, para evitar situações complicadas, vamos considerar que uma superfície plana idealmente condutora, S_1 , coincida com o plano xy . As fontes dos campos serão supostas apenas em $z < 0$. A região $z \geq 0$ será tomada como a região de difração. A figura abaixo ilustra a situação. Note que a superfície S_1 é apenas a superfície que define a fronteira da região de difração, isto é, constitui apenas uma das superfícies condutoras da suposta parede condutora separando a região $z < 0$, onde as fontes dos campos se encontram, da região de difração $z \geq 0$. Como mostra a figura, essa parede de separação tem uma espessura d e os campos totais no interior do material condutor ideal que compõe a parede são nulos. Então, para sermos precisos, vamos supor que as fontes estejam na região $z < -d$, sendo que haverá também cargas e correntes induzidas na superfície em $z = -d$, que **não** serão consideradas como fontes dos campos existentes na região $z < 0$. A teoria a ser desenvolvida a seguir prevê os campos na região $z \geq 0$, incluindo a superfície S_1 . Enfatizamos, portanto, que a superfície S_1 é uma entidade matemática e não uma parede condutora infinitamente fina, embora os argumentos abaixo sobre a simetria dos potenciais vetorial e escalar valham apenas quando tomarmos d infinitesimal.



Sejam $\mathbf{E}^{(0)}$ e $\mathbf{B}^{(0)}$ os campos que seriam produzidos pelas fontes na ausência da parede condutora e, portanto, na ausência da superfície S_1 (em $z = 0$) e da superfície em $z = -d$. Em outras palavras, os campos $\mathbf{E}^{(0)}$ e $\mathbf{B}^{(0)}$ são os devidos a apenas as fontes em $z < -d$. Assim, os campos totais podem ser escritos:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}^{(0)} + \mathbf{E}'$$

e

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}^{(0)} + \mathbf{B}',$$

onde \mathbf{E}' e \mathbf{B}' são os campos espalhados pelas cargas e correntes induzidas na parede condutora, de espessura infinitesimal d .

Sejam a corrente e a densidade superficiais complexas induzidas na superfície S_1 dadas por $\mathbf{j}(x, y, 0)$ e $\sigma(x, y, 0)$, respectivamente. Analogamente, sejam a corrente e a densidade superficiais complexas induzidas na superfície $z = -d$ dadas por $\mathbf{j}(x, y, -d)$ e $\sigma(x, y, -d)$, respectivamente. O potencial vetorial total, produzido pelas correntes superficiais $\mathbf{j}(x, y, 0)$ e $\mathbf{j}(x, y, -d)$, terá componente z nula, já que as correntes superficiais só não se anulam em direções paralelas ao plano xy . Escrevamos, portanto,

$$\mathbf{A}'(\mathbf{r}, t) = \mathbf{A}'_0(\mathbf{r}, t) + \mathbf{A}'_{-d}(\mathbf{r}, t),$$

onde $\mathbf{A}'(\mathbf{r}, t)$ é o potencial vetorial complexo resultante das correntes induzidas e $\mathbf{A}'_0(\mathbf{r}, t)$ e $\mathbf{A}'_{-d}(\mathbf{r}, t)$ são os potenciais vetoriais complexos induzidos, cada um, por cada uma das respectivas correntes $\mathbf{j}(x, y, 0)$ e $\mathbf{j}(x, y, -d)$. Então, é fácil vermos que, no caso da superfície S_1 , por simetria, as componentes do vetor potencial $\mathbf{A}'_0(\mathbf{r}, t)$ serão funções pares da coordenada z . Para vermos isso basta escrever a expressão do potencial vetorial complexo no calibre de Lorentz:

$$\mathbf{A}'_0(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c} \int_{-\infty}^{\infty} dx' \int_{-\infty}^{\infty} dy' \frac{\mathbf{j}(x', y', 0) \exp(ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| - i\omega t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|},$$

onde

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + z^2}.$$

Veja que a troca de z por $-z$ não altera o valor de $\mathbf{A}'_0(\mathbf{r}, t)$.

De forma análoga, as componentes do vetor potencial $\mathbf{A}'_{-d}(\mathbf{r}, t)$ serão funções simétricas com relação ao plano $z = -d$, como pode ser visto a partir da expressão:

$$\mathbf{A}'_{-d}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c} \int_{-\infty}^{\infty} dx' \int_{-\infty}^{\infty} dy' \frac{\mathbf{j}(x', y', -d) \exp(ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| - i\omega t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|},$$

onde, neste caso,

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z + d)^2}.$$

Note que a troca de $z + d$ por $-d - z$ não altera o valor de $\mathbf{A}'_{-d}(\mathbf{r}, t)$. Então, um ponto P , de coordenada z , dista $z + d$ do plano $z = -d$. O ponto simétrico ao plano $z = -d$ deve estar à mesma distância deste plano que o ponto P , mas do outro lado. Logo, a coordenada z desse ponto simétrico deve ser dada, em termos da coordenada z do ponto P , por $-d - z$. Como vemos na expressão acima, o potencial $\mathbf{A}'_{-d}(\mathbf{r}, t)$ é simétrico com relação a essa troca. No entanto,

como d é infinitesimal, o plano $z = -d$ tende para o plano xy e, portanto, nesse limite, o potencial $\mathbf{A}'_{-d}(\mathbf{r}, t)$ torna-se simétrico com relação ao plano xy . Então, a soma de duas funções pares com relação à coordenada z é também par com relação a essa coordenada. Logo, o potencial vetorial complexo total,

$$\mathbf{A}'(\mathbf{r}, t) = \mathbf{A}'_0(\mathbf{r}, t) + \mathbf{A}'_{-d}(\mathbf{r}, t),$$

é par com relação à coordenada z .

O mesmo se aplica ao potencial escalar: será uma função par da coordenada z . Essa simetria pode ser vista a partir das expressões para os potenciais complexos no calibre de Lorentz:

$$\phi'(\mathbf{r}, t) = \phi'_0(\mathbf{r}, t) + \phi'_{-d}(\mathbf{r}, t),$$

onde

$$\phi'_0(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} dx' \int_{-\infty}^{\infty} dy' \frac{\sigma_0(x', y') \exp(ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| - i\omega t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|},$$

com

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + z^2}$$

e

$$\phi'_{-d}(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} dx' \int_{-\infty}^{\infty} dy' \frac{\sigma_{-d}(x', y') \exp(ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| - i\omega t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|},$$

neste caso com

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z + d)^2}.$$

Fica evidente das expressões para os potenciais acima que

$$\phi'(x, y, -z, t) = \phi'(x, y, z, t),$$

$$A'_x(x, y, -z, t) = A'_x(x, y, z, t)$$

e

$$A'_y(x, y, -z, t) = A'_y(x, y, z, t).$$

Como

$$\mathbf{E}' = -\nabla\phi' + ik\mathbf{A}',$$

segue que

$$E'_x(x, y, -z, t) = E'_x(x, y, z, t)$$

e

$$E'_y(x, y, -z, t) = E'_y(x, y, z, t),$$

já que

$$\frac{\partial \phi'(x, y, -z, t)}{\partial x} = \frac{\partial \phi'(x, y, z, t)}{\partial x}$$

e

$$\frac{\partial \phi'(x, y, -z, t)}{\partial y} = \frac{\partial \phi'(x, y, z, t)}{\partial y}.$$

No entanto,

$$E'_z(x, y, -z, t) = -E'_z(x, y, z, t),$$

pois

$$\frac{\partial \phi'(x, y, -z, t)}{\partial(-z)} = -\frac{\partial \phi'(x, y, z, t)}{\partial z}.$$

Como

$$\mathbf{B}' = \nabla \times \mathbf{A}',$$

temos

$$B'_x = -\frac{\partial A'_y}{\partial z},$$

$$B'_y = \frac{\partial A'_x}{\partial z}$$

e

$$B'_z = \frac{\partial A'_y}{\partial x} - \frac{\partial A'_x}{\partial y}.$$

Portanto,

$$B'_x(x, y, -z, t) = -B'_x(x, y, z, t),$$

$$B'_y(x, y, -z, t) = -B'_y(x, y, z, t)$$

e

$$B'_z(x, y, -z, t) = B'_z(x, y, z, t).$$

Em resumo, com relação à coordenada z , E'_x , E'_y e B'_z são funções pares e B'_x , B'_y e E'_z são ímpares.

Difração baseada no campo indução magnética

Para evitar inconsistências na teoria, podemos utilizar condições de contorno de Dirichlet ou de Neumann sobre S_1 . Vamos utilizar a condição de Neumann, assim poderemos expressar o potencial vetorial em termos das componentes do campo indução magnética sobre S_1 . Logo, como quando analisamos a teoria escalar da difração, é fácil obter a função de Green de Neumann:

$$G_N(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{\exp(ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \frac{\exp(ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}''|)}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}''|},$$

onde

$$\begin{aligned} \mathbf{r}'' &= \mathbf{r}' - 2z'\hat{\mathbf{z}} \\ &= x'\hat{\mathbf{x}} + y'\hat{\mathbf{y}} - z'\hat{\mathbf{z}}. \end{aligned}$$

Com isso,

$$\mathbf{A}'(\mathbf{r}, t) = - \int_{S_1} da' G_N(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \hat{\mathbf{z}} \cdot \nabla' \mathbf{A}'(\mathbf{r}', t),$$

onde a normal à superfície S_1 é escolhida ao longo do sentido positivo do eixo z . A integral é, portanto, para ser calculada em $z' = 0^+$. Não há problema com calcular a integral em $z' = 0^+$ mesmo para $z < 0$, pois as componentes do potencial vetorial são pares com relação à coordenada z . Notemos que

$$G_N(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = G_N(\mathbf{r}', \mathbf{r})$$

e, sobre S_1 , temos $z' = 0$, implicando em

$$\begin{aligned} |\mathbf{r} - \mathbf{r}''| &= \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + z^2} \\ &= |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|, \end{aligned}$$

isto é,

$$G_N(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{\exp(ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{2\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}.$$

Com isso,

$$\mathbf{A}'(\mathbf{r}, t) = - \frac{1}{2\pi} \int_{S_1} da' \frac{\exp(ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \hat{\mathbf{z}} \cdot \nabla' \mathbf{A}'(\mathbf{r}', t).$$

Sabemos que

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{z}} \cdot \nabla' \mathbf{A}'(\mathbf{r}', t) &= \frac{\partial \mathbf{A}'(\mathbf{r}', t)}{\partial z'} \\ &= \hat{\mathbf{x}} \frac{\partial A'_x(\mathbf{r}', t)}{\partial z'} + \hat{\mathbf{y}} \frac{\partial A'_y(\mathbf{r}', t)}{\partial z'} \end{aligned}$$

e, portanto, de $\mathbf{B}' = \nabla \times \mathbf{A}'$, vem

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{z}} \cdot \nabla' \mathbf{A}'(\mathbf{r}', t) &= \hat{\mathbf{x}} B'_y(\mathbf{r}', t) - \hat{\mathbf{y}} B'_x(\mathbf{r}', t) \\ &= -\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{B}'(\mathbf{r}', t).\end{aligned}$$

Logo,

$$\mathbf{A}'(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{S_1} da' \frac{\exp(ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{B}'(\mathbf{r}', t).$$

Agora podemos usar essa expressão para obter o campo indução magnética:

$$\mathbf{B}'(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2\pi} \nabla \times \int_{S_1} da' \frac{\exp(ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{B}'(\mathbf{r}', t).$$

Como as componentes B'_x e B'_y são ímpares, segue que o integrando se anula nas aberturas, pois nelas não há descontinuidade na componente tangencial do campo indução magnética. Logo, a integral só não é nula sobre a parte metálica da superfície S_1 e escrevemos

$$\mathbf{B}'(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2\pi} \nabla \times \int_{\text{metal}} da' \frac{\exp(ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{B}'(\mathbf{r}', t).$$

O campo elétrico associado a esse campo indução magnética pode ser obtido da Lei de Ampère-Maxwell,

$$\nabla \times \mathbf{B}' = -ik\mathbf{E}',$$

isto é,

$$\begin{aligned}\mathbf{E}'(\mathbf{r}, t) &= \frac{i}{k} \nabla \times \mathbf{B}'(\mathbf{r}, t) \\ &= \frac{i}{2\pi k} \nabla \times \left[\nabla \times \int_{\text{metal}} da' \frac{\exp(ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{B}'(\mathbf{r}', t) \right].\end{aligned}$$

Essa abordagem é conveniente quando, ao invés de a parede condutora ter aberturas, tivermos, na região geométrica da parede, uma ou mais placas metálicas delgadas tangenciando o plano xy , como, por exemplo, um disco de raio a . A maior dificuldade está em determinarmos, sobre o metal, o valor das componentes tangentes do campo indução magnética para obtermos o valor de $\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{B}'(\mathbf{r}', t)$ que aparece no integrando. Como uma aproximação, podemos usar $\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{B}^{(0)}(\mathbf{r}', t)$.

Difração baseada no campo elétrico

Seria interessante termos uma teoria vetorial da difração mais conveniente para o caso de aberturas, como originalmente encaminhamos a discussão, e não como no caso acima, em que a integral envolvida, ao invés de ser feita sobre as aberturas,

é feita sobre o metal. Se, no integrando envolvido em uma tal abordagem alternativa tivermos $\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}', t)$, onde $\mathbf{E} = \mathbf{E}^{(0)} + \mathbf{E}'$ é o campo elétrico total, então, porque, como vimos, as componentes tangenciais do campo elétrico se anulam no condutor, a integral deverá ser feita apenas nas aberturas. Para construirmos uma teoria da difração com essa peculiaridade, ao invés de basearmos a abordagem no cálculo do campo indução magnética, como fizemos acima, podemos começar procurando por uma outra solução para o campo elétrico, satisfazendo as equações de Maxwell, mas que tenha algo como $\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}', t)$ no integrando. Uma maneira imediata de encontrarmos um campo elétrico espalhado, dado em termos de uma integral com um integrando envolvendo $\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{E}'(\mathbf{r}', t)$, decorre da propriedade de o conjunto formado pelas equações de Maxwell no presente contexto ser invariante pela transformação

$$\mathbf{E}' \rightarrow \mathbf{B}'$$

e

$$\mathbf{B}' \rightarrow -\mathbf{E}'.$$

Com isso, a solução obtida anteriormente, para o campo indução magnética, isto é,

$$\mathbf{B}'(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2\pi} \nabla \times \int_{S_1} da' \frac{\exp(ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{B}'(\mathbf{r}', t) \quad (\text{abordagem anterior}),$$

se transforma em

$$\mathbf{E}'(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2\pi} \nabla \times \int_{S_1} da' \frac{\exp(ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{E}'(\mathbf{r}', t), \quad \text{para, digamos, } z > 0.$$

Ainda não conseguimos, como desejado, $\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}', t)$ no integrando e, portanto, ainda não podemos fazer a integral apenas sobre as aberturas da superfície condutora S_1 , mas resolveremos isso mais adiante. É importante notarmos, desde já, que esse resultado para o campo elétrico não decorre simplesmente de tomarmos o rotacional do campo indução magnética da abordagem anterior e multiplicá-lo por i/k , que é distinta da presente discussão. Esse campo elétrico, inclusive, fornece um campo indução magnética distinto, obtido da Lei da Indução de Faraday,

$$\nabla \times \mathbf{E}' = ik\mathbf{B}',$$

isto é,

$$\mathbf{B}'(\mathbf{r}, t) = -\frac{i}{2\pi k} \nabla \times \left[\nabla \times \int_{S_1} da' \frac{\exp(ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{E}'(\mathbf{r}', t) \right], \quad \text{para } z > 0.$$

Também é importante notarmos que, ao contrário do campo indução magnética da abordagem anterior, o campo elétrico proposto acima deve ter componentes tangenciais pares e componente normal ímpar, com relação à coordenada z . Caso

formos calcular o resultado para $z < 0$, como a integral é feita para $z' = 0^+$, segue que a componente z do campo elétrico deve mudar de sinal e propomos, então,

$$\mathbf{E}'(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{2\pi} \nabla \times \int_{S_1} da' \frac{\exp(ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{E}'(\mathbf{r}', t), \text{ para } z < 0.$$

Por construção, portanto, $\mathbf{E}'(\mathbf{r}, t)$ satisfaz as equações de Maxwell e também possui a simetria requerida com relação à superfície S_1 .

Para o cálculo do campo elétrico acima, a integral deve ser feita sobre todo o plano xy . No entanto, como

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}^{(0)} + \mathbf{E}',$$

podemos também escrever

$$\mathbf{E}'(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2\pi} \nabla \times \int_{S_1} da' \frac{\exp(ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}', t) - \mathbf{E}^{(1)}(\mathbf{r}, t), \text{ para } z > 0,$$

e

$$\mathbf{E}'(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{2\pi} \nabla \times \int_{S_1} da' \frac{\exp(ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}', t) + \mathbf{E}^{(1)}(\mathbf{r}, t), \text{ para } z < 0,$$

onde $\mathbf{E}(\mathbf{r}', t)$ é o campo elétrico total e definimos

$$\mathbf{E}^{(1)}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2\pi} \nabla \times \int_{S_1} da' \frac{\exp(ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{E}^{(0)}(\mathbf{r}', t).$$

Como a componente tangencial do campo elétrico total deve ser contínua e o campo elétrico deve anular-se no interior de um condutor ideal, segue que as integrais envolvendo $\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{E}$ são nulas em todo o plano xy , exceto nas aberturas. O que significa o campo $\mathbf{E}^{(1)}$? Analogamente ao que fizemos no caso do campo \mathbf{E}' , para $z > 0$, é evidente que se, ao invés de $\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{E}'(\mathbf{r}', t)$ no integrando da expressão colocássemos $\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{E}^{(0)}(\mathbf{r}', t)$, obteríamos, ao invés de \mathbf{E}' , o campo não perturbado, $\mathbf{E}^{(0)}(\mathbf{r}', t)$, isto é,

$$\mathbf{E}^{(0)}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2\pi} \nabla \times \int_{S_1} da' \frac{\exp(ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{E}^{(0)}(\mathbf{r}', t), \text{ para } z > 0.$$

Logo,

$$\mathbf{E}^{(1)}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}^{(0)}(\mathbf{r}, t).$$

Assim, para $z > 0$, o campo elétrico total pode ser escrito

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2\pi} \nabla \times \int_{\text{Aberturas}} da' \frac{\exp(ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}', t), \text{ para } z > 0,$$

que é definido como o campo elétrico difratado.