Radiação de Dipolo Elétrico ou Radiação Dipolar Elétrica

Considerando apenas a zona de radiação, obtivemos uma expansão aproximada para o potencial vetorial, supondo que o número de onda multiplicado pelo tamanho característico da distribuição localizada de corrente era muito menor do que a unidade:

$$\begin{aligned}\mathbf{A}_c(\mathbf{r}) &\approx \frac{\exp(ikr)}{rc}\int_V d^3r'\mathbf{J}_c(\mathbf{r}') \\ &- ik\frac{\exp(ikr)}{rc}\int_V d^3r'(\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{r}')\mathbf{J}_c(\mathbf{r}').\end{aligned}$$

Quando consideramos apenas o primeiro termo da expansão acima,

$$\mathbf{A}_{DE}(\mathbf{r}) = \frac{\exp(ikr)}{rc}\int_V d^3r'\mathbf{J}_c(\mathbf{r}').$$

Da equação da continuidade temos

$$\nabla\cdot\mathbf{J}(\mathbf{r},t) = -\frac{\partial\rho(\mathbf{r},t)}{\partial t}.$$

Como

$$\mathbf{J}(\mathbf{r},t) = \mathrm{Re}\left[\mathbf{J}_c(\mathbf{r})\exp(-i\omega t)\right]$$

e, analogamente,

$$\rho(\mathbf{r},t) = \mathrm{Re}\left[\rho_c(\mathbf{r})\exp(-i\omega t)\right],$$

a equação da continuidade fornece

$$\nabla'\cdot\mathbf{J}_c(\mathbf{r}') = i\omega\rho_c(\mathbf{r}').$$

No entanto, no integrando da integral que dá $\mathbf{A}_{DE}(\mathbf{r})$ aparece apenas $\mathbf{J}_c(\mathbf{r}')$, ao invés de $\nabla'\cdot\mathbf{J}_c(\mathbf{r}')$. Para resolver isso, consideremos:

$$\mathbf{J}_c(\mathbf{r}') = \hat{\mathbf{x}}_i\hat{\mathbf{x}}_i\cdot\mathbf{J}_c(\mathbf{r}'),$$

onde estamos usando a convenção de Einstein para somas. Assim, como

$$\boldsymbol{\nabla}'x_i' = \hat{\mathbf{x}}_i,$$

segue que

$$\begin{aligned}\mathbf{J}_c(\mathbf{r}') &= \hat{\mathbf{x}}_i\left(\boldsymbol{\nabla}'x_i'\right)\cdot\mathbf{J}_c(\mathbf{r}') \\ &= \hat{\mathbf{x}}_i\boldsymbol{\nabla}'\cdot\left[x_i'\mathbf{J}_c(\mathbf{r}')\right] - \hat{\mathbf{x}}_i x_i'\boldsymbol{\nabla}'\cdot\mathbf{J}_c(\mathbf{r}') \\ &= \hat{\mathbf{x}}_i\boldsymbol{\nabla}'\cdot\left[x_i'\mathbf{J}_c(\mathbf{r}')\right] - \mathbf{r}'\boldsymbol{\nabla}'\cdot\mathbf{J}_c(\mathbf{r}').\end{aligned}$$

Portanto,

$$\mathbf{A}_{DE}(\mathbf{r}) = \frac{\exp(ikr)}{rc}\hat{\mathbf{x}}_i \int_V d^3r' \boldsymbol{\nabla}' \cdot [x_i' \mathbf{J}_c(\mathbf{r}')] - \frac{\exp(ikr)}{rc}\int_V d^3r' \mathbf{r}' \boldsymbol{\nabla}' \cdot \mathbf{J}_c(\mathbf{r}') .$$

Pelo Teorema da Divergência de Gauss, a primeira das integrais volumétricas pode ser transformada em uma integral na superfície $S(V)$, fronteira de V:

$$\int_V d^3r' \boldsymbol{\nabla}' \cdot [x_i' \mathbf{J}_c(\mathbf{r}')] = \oint_{S(V)} da'\, x_i' \hat{\mathbf{n}}' \cdot \mathbf{J}_c(\mathbf{r}') .$$

Na superfície, fronteira da região onde a densidade de corrente não é nula, porque envolve toda essa região,

$$\hat{\mathbf{n}}' \cdot \mathbf{J}_c(\mathbf{r}')\big|_{S(V)} = 0,$$

pois, se a densidade de corrente tivesse uma componente normal à fronteira, então, por continuidade, haveria corrente através da fronteira, o que contradiziria a hipótese de a superfície ser a fronteira da região onde a densidade de corrente não se anula. Logo, na aproximação dipolar elétrica,

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{DE}(\mathbf{r}) &= -\frac{\exp(ikr)}{rc}\int_V d^3r' \mathbf{r}' \boldsymbol{\nabla}' \cdot \mathbf{J}_c(\mathbf{r}') \\ &= -\frac{i\omega \exp(ikr)}{rc}\int_V d^3r' \mathbf{r}' \rho_c(\mathbf{r}') , \end{aligned}$$

isto é,

$$\mathbf{A}_{DE}(\mathbf{r}) = -ik\frac{\exp(ikr)}{r}\mathbf{p}_c,$$

onde, como acima,

$$k = \frac{\omega}{c}$$

e definimos o momento de dipolo elétrico complexo como

$$\mathbf{p}_c = \int_V d^3r' \mathbf{r}' \rho_c(\mathbf{r}') .$$

Os campos de radiação

O campo indução magnética complexo de radiação pode ser obtido a partir de $\mathbf{A}_{DE}(\mathbf{r})$, na aproximação de dipolo elétrico, através da equação

$$\mathbf{B}_{DE}(\mathbf{r}) = \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A}_{DE}(\mathbf{r})$$

e desprezando termos que não sejam proporcionais a r^{-1}. Assim,

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{DE}(\mathbf{r}) &= -ik\boldsymbol{\nabla} \times \left[\frac{\exp(ikr)}{r}\mathbf{p}_c\right] \\ &= ik\mathbf{p}_c \times \boldsymbol{\nabla}\left[\frac{\exp(ikr)}{r}\right] \\ &= ik\mathbf{p}_c \times \hat{\mathbf{r}}\left[ik\frac{\exp(ikr)}{r} - \frac{\exp(ikr)}{r^2}\right] \end{aligned}$$

e, portanto,

$$\mathbf{B}_{DE}^{\text{rad}}(\mathbf{r}) = k^2 \frac{\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{p}_c}{r} \exp(ikr).$$

Da Lei de Ampère-Maxwell, podemos escrever

$$\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{B}_{DE}(\mathbf{r}) = -ik\mathbf{E}_{DE}(\mathbf{r}),$$

ou seja,

$$\mathbf{E}_{DE}(\mathbf{r}) = \frac{i}{k}\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{B}_{DE}(\mathbf{r})$$

e, assim, o campo elétrico de radiação fica

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_{DE}^{\text{rad}}(\mathbf{r}) &= \frac{i}{k}\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{B}_{DE}^{\text{rad}}(\mathbf{r}) \\
&= ik\boldsymbol{\nabla} \times \left[\frac{\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{p}_c}{r} \exp(ikr)\right] \\
&= ik\boldsymbol{\nabla} \times \left[\frac{\mathbf{r} \times \mathbf{p}_c}{r^2} \exp(ikr)\right] \\
&\approx ik\frac{1}{r^2}\boldsymbol{\nabla} \times \left[\mathbf{r} \times \mathbf{p}_c \exp(ikr)\right] \\
&= ik\frac{\exp(ikr)}{r^2}\boldsymbol{\nabla} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{p}_c) + ik\frac{1}{r^2}\left[\boldsymbol{\nabla} \exp(ikr)\right] \times (\mathbf{r} \times \mathbf{p}_c) \\
&= ik\frac{\exp(ikr)}{r^2}\boldsymbol{\nabla} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{p}_c) - k^2\frac{\exp(ikr)}{r}\hat{\mathbf{r}} \times (\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{p}_c).
\end{aligned}$$

Mas,

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\nabla} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{p}_c) &= \hat{\mathbf{x}}_l \varepsilon_{lmn} \partial_m \left[\varepsilon_{npq} x_p (\mathbf{p}_c)_q\right] \\
&= \hat{\mathbf{x}}_l \varepsilon_{lmn} \varepsilon_{npq} \delta_{mp} (\mathbf{p}_c)_q \\
&= \hat{\mathbf{x}}_l \varepsilon_{lmn} \varepsilon_{nmq} (\mathbf{p}_c)_q \\
&= \hat{\mathbf{x}}_l (\delta_{lm}\delta_{mq} - \delta_{lq}\delta_{mm}) (\mathbf{p}_c)_q \\
&= \hat{\mathbf{x}}_l \delta_{lm}\delta_{mq} (\mathbf{p}_c)_q - \hat{\mathbf{x}}_l \delta_{lq}\delta_{mm} (\mathbf{p}_c)_q \\
&= \mathbf{p}_c - 3\mathbf{p}_c \\
&= -2\mathbf{p}_c.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_{DE}^{\text{rad}}(\mathbf{r}) &= -2ik\frac{\exp(ikr)}{r^2}\mathbf{p}_c - k^2\frac{\exp(ikr)}{r}\hat{\mathbf{r}} \times (\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{p}_c). \\
&\approx -k^2\frac{\exp(ikr)}{r}\hat{\mathbf{r}} \times (\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{p}_c),
\end{aligned}$$

onde desprezamos o termo proporcional a r^{-2}. Definimos o campo de radiação dipolar elétrica como

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_{DE}^{\mathrm{rad}}(\mathbf{r}) &= -k^2 \frac{\exp(ikr)}{r} \hat{\mathbf{r}} \times (\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{p}_c) \\
&= \left[k^2 \frac{1}{r} (\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{p}_c) \exp(ikr) \right] \times \hat{\mathbf{r}} \\
&= \left[k^2 \frac{1}{r} (\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{p}_c) \exp(ikr) \right] \times \hat{\mathbf{r}} \\
&= \mathbf{B}_{DE}^{\mathrm{rad}}(\mathbf{r}) \times \hat{\mathbf{r}}.
\end{aligned}$$