Modos TEM

Por que, ao tratarmos guias de ondas cilíndricos, procuramos por modos tranversais elétricos (TE) e transversais magnéticos (TM), mas não procuramos por modos tranversais eletromagnéticos (TEM)? Os modos TEM têm ϵ_z e β_z ambos nulos em guias de ondas. Suponhamos, portanto, que

$$\epsilon_z = 0$$

e

$$\beta_z = 0$$

no interior de um guia e tentemos resolver as equações. Como fizemos anteriormente, tomemos como dependência temporal de nosso ansatz a função $\exp(-i\omega t)$. Da Lei de Indução de Faraday temos

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\epsilon} &= -\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{\beta}}{\partial t} \\ &= i\frac{\omega}{c}\boldsymbol{\beta}, \end{aligned}$$

isto é,

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\epsilon}_t + \boldsymbol{\nabla} \times (\hat{\mathbf{z}}\epsilon_z) = i\frac{\omega}{c}\boldsymbol{\beta}_t + i\frac{\omega}{c}\hat{\mathbf{z}}\beta_z,$$

ou seja,

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\epsilon}_t = i\frac{\omega}{c}\boldsymbol{\beta}_t,$$

ou ainda,

$$\boldsymbol{\nabla}_t \times \boldsymbol{\epsilon}_t + \hat{\mathbf{z}} \times \frac{\partial \boldsymbol{\epsilon}_t}{\partial z} = i\frac{\omega}{c}\boldsymbol{\beta}_t.$$

Multiplicando essa igualdade escalarmente por $\hat{\mathbf{z}}$ resulta em

$$\hat{\mathbf{z}} \cdot (\boldsymbol{\nabla}_t \times \boldsymbol{\epsilon}_t) = 0$$

e, como $\boldsymbol{\nabla}_t \times \boldsymbol{\epsilon}_t$ só tem componente ao longo do versor $\hat{\mathbf{z}}$, segue que

$$\boldsymbol{\nabla}_t \times \boldsymbol{\epsilon}_t = \mathbf{0}.$$

Também sabemos que

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\epsilon} = 0$$

dentro do guia de ondas e, portanto,

$$\left(\boldsymbol{\nabla}_t + \hat{\mathbf{z}}\frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot \boldsymbol{\epsilon}_t = 0,$$

isto é,

$$\boldsymbol{\nabla}_t \cdot \boldsymbol{\epsilon}_t = 0.$$

Temos, portanto, um problema em duas dimensões, pois, usando o ansatz para a dependência em z como fizemos para os modos TE e TM, podemos escrever

$$\boldsymbol{\epsilon}_t = \exp(ik_z z)\,\boldsymbol{\epsilon}'_t,$$

onde

$$\boldsymbol{\epsilon}'_t = \boldsymbol{\epsilon}'_t(x, y).$$

O problema bidimensional é, então, especificado pelas equações eletrostáticas:

$$\boldsymbol{\nabla}_t \cdot \boldsymbol{\epsilon}'_t = 0$$

e

$$\boldsymbol{\nabla}_t \times \boldsymbol{\epsilon}'_t = \mathbf{0}.$$

Porque $\boldsymbol{\epsilon}'_t$ é irrotacional, segue que existe uma função escalar

$$\phi_t = \phi_t(x, y)$$

tal que

$$\boldsymbol{\epsilon}'_t = -\boldsymbol{\nabla}_t \phi_t.$$

Logo,

$$\boldsymbol{\nabla}_t \cdot \boldsymbol{\epsilon}'_t = 0$$

implica em

$$\nabla_t^2 \phi_t = 0$$

no interior de cada uma das seções retas transversais do guia de ondas. A fronteira a uma seção transversal é uma equipotencial de ϕ_t e, portanto, do teorema da unicidade das soluções em eletrostática, segue que $\phi_t =$ constante é a solução do problema, implicando que

$$\boldsymbol{\epsilon}'_t = \mathbf{0}$$

e, portanto,

$$\boldsymbol{\epsilon}_t = \mathbf{0}$$

para modos transversais eletromagnéticos. Como

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\epsilon}_t = i\frac{\omega}{c}\boldsymbol{\beta}_t,$$

segue que

$$\boldsymbol{\beta}_t = \mathbf{0}.$$

Assim, vemos que não há como termos modos TEM em guias ocos. A única maneira de propagarmos ondas transversais em guias de ondas cilíndricos é quando não forem ocos, como no caso de cabos coaxiais, por exemplo.