Cavidades Ressonantes

Podemos construir uma cavidade ressonante a partir de um guia de ondas cilíndrico simplesmente adicionando tampas transversais ao longo do eixo do guia. Assim, escolhamos o eixo z no interior do guia de ondas e paralelo ao seu eixo. Consideremos duas tampas condutoras, feitas com o mesmo material das paredes do guia, colocadas transversalmente ao eixo do guia, uma em $z = 0$ e a outra em $z = d$, com $d > 0$. Para tratar o presente problema, procedemos como para o caso de guias de ondas cilíndricos, exceto que o ansatz para a dependência dos campos com a coordenada z deve ser apropriada a uma onda estacionária, ao invés de uma onda viajante. Dessa forma, para cada uma das componentes dos campos, propomos que essa dependência seja uma combinação linear de $\operatorname{sen}(k_z z)$ e $\cos(k_z z)$.

Vamos considerar que o interior da cavidade ressonante seja preenchido por um material dielétrico linear, homogêneo e isotrópico, com permissividade elétrica ε e permeabilidade magnética μ. Para ondas monocromáticas armazenadas dentro da cavidade ressonante, tomemos como dependência temporal de nosso ansatz a função $\exp(-i\omega t)$. Com isso, como para guias de ondas cilíndricos, as equações de onda escrevem-se

$$\nabla^2 \boldsymbol{\epsilon} + \mu\varepsilon \frac{\omega^2}{c^2} \boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{0}$$

e

$$\nabla^2 \boldsymbol{\beta} + \mu\varepsilon \frac{\omega^2}{c^2} \boldsymbol{\beta} = \mathbf{0}.$$

Modos TE

Analogamente ao que fizemos no caso de um guia de ondas cilíndrico, procuremos por modos transversais elétricos, TE, ou seja, imponhamos $\epsilon_z = 0$ dentro da cavidade ressonante. Da Lei de Indução de Faraday temos

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\epsilon} &= -\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{\beta}}{\partial t} \\ &= i\frac{\omega}{c}\boldsymbol{\beta}. \end{aligned}$$

Em termos de componentes cartesianas, essa equação resulta em

$$\begin{aligned} \frac{\partial \epsilon_z}{\partial y} - \frac{\partial \epsilon_y}{\partial z} &= i\frac{\omega}{c}\beta_x, \\ \frac{\partial \epsilon_x}{\partial z} - \frac{\partial \epsilon_z}{\partial x} &= i\frac{\omega}{c}\beta_y, \\ \frac{\partial \epsilon_y}{\partial x} - \frac{\partial \epsilon_x}{\partial y} &= i\frac{\omega}{c}\beta_z. \end{aligned}$$

Para modos TE:

$$-\frac{\partial \epsilon_y}{\partial z} = i\frac{\omega}{c}\beta_x$$

e

$$\frac{\partial \epsilon_x}{\partial z} = i\frac{\omega}{c}\beta_y.$$

Como explicado acima, procuramos por ondas estacionárias ao longo do eixo z. Assim, tomamos a dependência funcional em z do campo $\boldsymbol{\epsilon}$ como uma combinação linear de sen $(k_z z)$ e $\cos(k_z z)$. No entanto, para os modos TE as componentes não nulas de $\boldsymbol{\epsilon}$ tangenciam as tampas condutoras e, como condição de contorno, devem ser nulas em $z = 0$ e $z = d$. Portanto, necessariamente devemos ter

$$\boldsymbol{\epsilon}_t = \operatorname{sen}(k_z z)\,\boldsymbol{\epsilon}'_t,$$

onde definimos

$$\boldsymbol{\epsilon}_t = \hat{\mathbf{x}}\epsilon_x + \hat{\mathbf{y}}\epsilon_y,$$

$$\boldsymbol{\epsilon}'_t = \hat{\mathbf{x}}\epsilon'_x + \hat{\mathbf{y}}\epsilon'_y$$

e

$$\boldsymbol{\epsilon}'_t = \boldsymbol{\epsilon}'_t(x, y, t),$$

com

$$k_z = \frac{p\pi}{d},\ p = 1, 2, \ldots,$$

já que $p \neq 0$ para soluções não triviais. Com isso, as equações

$$-\frac{\partial \epsilon_y}{\partial z} = i\frac{\omega}{c}\beta_x$$

e

$$\frac{\partial \epsilon_x}{\partial z} = i\frac{\omega}{c}\beta_y$$

fornecem

$$\beta_y = -i\frac{k_z c}{\omega}\epsilon'_x \cos(k_z z)$$

e

$$\beta_x = i\frac{k_z c}{\omega}\epsilon'_y \cos(k_z z).$$

Da Lei de Ampère-Maxwell obtemos

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{\beta} &= \frac{\mu\varepsilon}{c}\frac{\partial\boldsymbol{\epsilon}}{\partial t}\\ &= -i\mu\varepsilon\frac{\omega}{c}\boldsymbol{\epsilon},\end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \beta_z}{\partial y} - \frac{\partial \beta_y}{\partial z} &= -i\mu\varepsilon\frac{\omega}{c}\epsilon'_x \mathrm{sen}\,(k_z z) \\
\frac{\partial \beta_x}{\partial z} - \frac{\partial \beta_z}{\partial x} &= -i\mu\varepsilon\frac{\omega}{c}\epsilon'_y \mathrm{sen}\,(k_z z) \\
\frac{\partial \beta_y}{\partial x} - \frac{\partial \beta_x}{\partial y} &= -i\mu\varepsilon\frac{\omega}{c}\epsilon_z \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Com o ansatz referente à dependência em z, essas equações dão

$$\frac{\partial \beta_z}{\partial y} - i\frac{k_z^2 c}{\omega}\epsilon'_x \mathrm{sen}\,(k_z z) = -i\mu\varepsilon\frac{\omega}{c}\epsilon'_x \mathrm{sen}\,(k_z z)$$

e

$$-i\frac{k_z^2 c}{\omega}\epsilon'_y \mathrm{sen}\,(k_z z) - \frac{\partial \beta_z}{\partial x} = -i\mu\varepsilon\frac{\omega}{c}\epsilon'_y \mathrm{sen}\,(k_z z)\,,$$

o que implica que

$$\beta_z = \beta'_z \mathrm{sen}\,(k_z z)\,,$$

com

$$\beta'_z = \beta'_z\,(x, y, t)\,.$$

Logo, das equações acima, concluímos que podemos obter as componentes não nulas do campo elétrico em termos de derivadas espaciais de β'_z:

$$\frac{\partial \beta'_z}{\partial y} - i\frac{k_z^2 c}{\omega}\epsilon'_x = -i\mu\varepsilon\frac{\omega}{c}\epsilon'_x$$

e

$$-i\frac{k_z^2 c}{\omega}\epsilon'_y - \frac{\partial \beta'_z}{\partial x} = -i\mu\varepsilon\frac{\omega}{c}\epsilon'_y,$$

isto é,

$$\epsilon'_x = \frac{-i\omega}{c\left(k_z^2 - \mu\varepsilon\frac{\omega^2}{c^2}\right)}\frac{\partial \beta'_z}{\partial y}$$

e

$$\epsilon'_y = \frac{i\omega}{c\left(k_z^2 - \mu\varepsilon\frac{\omega^2}{c^2}\right)}\frac{\partial \beta'_z}{\partial x}.$$

Também temos

$$\begin{aligned}
\beta_y &= -i\frac{k_z c}{\omega}\epsilon'_x \cos\,(k_z z) \\
&= -\frac{k_z \cos\,(k_z z)}{k_z^2 - \mu\varepsilon\frac{\omega^2}{c^2}}\frac{\partial \beta'_z}{\partial y}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\beta_x &= i\frac{k_z c}{\omega}\epsilon'_y \cos(k_z z) \\ &= -\frac{k_z \cos(k_z z)}{k_z^2 - \mu\varepsilon\frac{\omega^2}{c^2}}\frac{\partial \beta'_z}{\partial x}.\end{aligned}$$

Resumindo, se definirmos o operador nabla transversal como

$$\boldsymbol{\nabla}_t = \hat{\mathbf{x}}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{y}}\frac{\partial}{\partial y}$$

podemos escrever

$$\boldsymbol{\beta}_t = -\frac{k_z \cos(k_z z)}{k_z^2 - \mu\varepsilon\frac{\omega^2}{c^2}}\boldsymbol{\nabla}_t \beta'_z,$$

onde definimos

$$\boldsymbol{\beta}_t = \hat{\mathbf{x}}\beta_x + \hat{\mathbf{y}}\beta_y,$$

e

$$\boldsymbol{\epsilon}_t = \frac{i\omega \mathrm{sen}(k_z z)}{c\left(k_z^2 - \mu\varepsilon\frac{\omega^2}{c^2}\right)}\hat{\mathbf{z}} \times \boldsymbol{\nabla}_t \beta'_z.$$

Dessa forma, se encontrarmos β'_z, facilmente obteremos β_x, β_y, β_z, ϵ_x e ϵ_y. Para obtermos β'_z, utilizamos a equação de onda:

$$\nabla^2 \beta_z + \mu\varepsilon\frac{\omega^2}{c^2}\beta_z = 0.$$

Com o ansatz para a dependência em z, que resulta em

$$\beta_z = \beta'_z \mathrm{sen}(k_z z),$$

obtemos a equação para β'_z:

$$\frac{\partial^2 \beta'_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \beta'_z}{\partial y^2} + \left(\mu\varepsilon\frac{\omega^2}{c^2} - k_z^2\right)\beta'_z = 0.$$

Essa equação e as condições de contorno para β_z resolvem o problema para modos TE. Na superfície lateral da cavidade ressonante, a componente normal de $\boldsymbol{\beta}$ deve ser nula, pois o condutor é ideal e $\boldsymbol{\beta}$ se anula dentro do material condutor. Logo,

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\beta}|_S = 0.$$

Mas como a normal à superfície da cavidade ressonante cilíndrica é ortogonal ao eixo z que definimos, podemos escrever

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\beta}|_S &= \hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\beta}_t|_S \\ &= 0,\end{aligned}$$

resultando em

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\beta}_t|_S &= -\frac{k_z \cos(k_z z)}{k_z^2 - \mu\varepsilon \frac{\omega^2}{c^2}}\, \hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\nabla}_t \beta_z'|_S \\ &= 0,\end{aligned}$$

isto é,

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\nabla}_t \beta_z'|_S = 0$$

é a condição de contorno para modos TE.

Modos TM

Impondo que $\beta_z = 0$ dentro da cavidade ressonante, obteremos os modos transversais magnéticos, TM. Da Lei de Ampère-Maxwell obtemos

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\beta} &= \frac{\mu\varepsilon}{c} \frac{\partial \boldsymbol{\epsilon}}{\partial t} \\ &= -i\mu\varepsilon \frac{\omega}{c} \boldsymbol{\epsilon},\end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}\frac{\partial \beta_z}{\partial y} - \frac{\partial \beta_y}{\partial z} &= -i\mu\varepsilon \frac{\omega}{c} \epsilon_x, \\ \frac{\partial \beta_x}{\partial z} - \frac{\partial \beta_z}{\partial x} &= -i\mu\varepsilon \frac{\omega}{c} \epsilon_y, \\ \frac{\partial \beta_y}{\partial x} - \frac{\partial \beta_x}{\partial y} &= -i\mu\varepsilon \frac{\omega}{c} \epsilon_z.\end{aligned}$$

Para modos TM:

$$-\frac{\partial \beta_y}{\partial z} = -i\mu\varepsilon \frac{\omega}{c} \epsilon_x$$

e

$$\frac{\partial \beta_x}{\partial z} = -i\mu\varepsilon \frac{\omega}{c} \epsilon_y.$$

Aqui também tomamos a dependência funcional em z do campo $\boldsymbol{\epsilon}$ como uma combinação linear de $\operatorname{sen}(k_z z)$ e $\cos(k_z z)$. Novamente observamos que as componentes de $\boldsymbol{\epsilon}$ que tangenciam as tampas condutoras, como condição de contorno, devem ser nulas em $z = 0$ e $z = d$. Portanto, necessariamente devemos ter, mesmo para modos TM,

$$\boldsymbol{\epsilon}_t = \operatorname{sen}(k_z z)\, \boldsymbol{\epsilon}_t',$$

com

$$k_z = \frac{p\pi}{d},\ p = 0, 1, 2, \ldots,$$

já que $p=0$ implica em $\boldsymbol{\epsilon}_t=\mathbf{0}$, mas, como veremos abaixo, não necessariamente implica em $\epsilon_z=0$ para modos TM. Assim,

$$-\frac{\partial \beta_y}{\partial z} = -i\mu\varepsilon\frac{\omega}{c}\mathrm{sen}\,(k_z z)\,\epsilon'_x$$

e

$$\frac{\partial \beta_x}{\partial z} = -i\mu\varepsilon\frac{\omega}{c}\mathrm{sen}\,(k_z z)\,\epsilon'_y.$$

O ansatz para $\boldsymbol{\beta}_t$ que faz sentido à luz dessas equações é

$$\boldsymbol{\beta}_t = \cos(k_z z)\,\boldsymbol{\beta}'_t$$

e, portanto,

$$-\frac{\partial \beta_y}{\partial z} = -i\mu\varepsilon\frac{\omega}{c}\mathrm{sen}\,(k_z z)\,\epsilon'_x$$

fornece

$$k_z\mathrm{sen}\,(k_z z)\,\beta'_y = -i\mu\varepsilon\frac{\omega}{c}\mathrm{sen}\,(k_z z)\,\epsilon'_x$$

e

$$\frac{\partial \beta_x}{\partial z} = -i\mu\varepsilon\frac{\omega}{c}\mathrm{sen}\,(k_z z)\,\epsilon'_y$$

dá

$$-k_z\mathrm{sen}\,(k_z z)\,\beta'_x = -i\mu\varepsilon\frac{\omega}{c}\mathrm{sen}\,(k_z z)\,\epsilon'_y,$$

isto é,

$$\beta'_x = i\mu\varepsilon\frac{\omega}{k_z c}\epsilon'_y$$

e

$$\beta'_y = -i\mu\varepsilon\frac{\omega}{k_z c}\epsilon'_x.$$

Da Lei de Indução de Faraday temos

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{\epsilon} &= -\frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{\beta}}{\partial t}\\ &= i\frac{\omega}{c}\boldsymbol{\beta}.\end{aligned}$$

Em termos de componentes cartesianas, essa equação resulta em

$$\begin{aligned}\frac{\partial\epsilon_z}{\partial y}-\frac{\partial\epsilon_y}{\partial z} &= i\frac{\omega}{c}\beta_x,\\ \frac{\partial\epsilon_x}{\partial z}-\frac{\partial\epsilon_z}{\partial x} &= i\frac{\omega}{c}\beta_y,\\ \frac{\partial\epsilon_y}{\partial x}-\frac{\partial\epsilon_x}{\partial y} &= i\frac{\omega}{c}\beta_z\\ &= 0.\end{aligned}$$

Para modos TM e usando o ansatz para a dependência em z acima, obtemos

$$\frac{\partial \epsilon_z}{\partial y} - k_z \cos(k_z z)\, \epsilon'_y = i\frac{\omega}{c} \cos(k_z z)\, \beta'_x,$$

e

$$k_z \cos(k_z z)\, \epsilon'_x - \frac{\partial \epsilon_z}{\partial x} = i\frac{\omega}{c} \cos(k_z z)\, \beta'_y,$$

ou seja,

$$k_z \cos(k_z z)\, \epsilon'_y + i\frac{\omega}{c} \cos(k_z z)\, \beta'_x = \frac{\partial \epsilon_z}{\partial y}$$

e

$$k_z \cos(k_z z)\, \epsilon'_x - i\frac{\omega}{c} \cos(k_z z)\, \beta'_y = \frac{\partial \epsilon_z}{\partial x},$$

ou ainda,

$$k_z \cos(k_z z)\, \epsilon'_y + i\frac{\omega}{c} \cos(k_z z)\, i\mu\varepsilon \frac{\omega}{k_z c} \epsilon'_y = \frac{\partial \epsilon_z}{\partial y},$$

que dá

$$\cos(k_z z)\, \epsilon'_y = \frac{k_z}{k_z^2 - \mu\varepsilon \frac{\omega^2}{c^2}} \frac{\partial \epsilon_z}{\partial y},$$

e

$$k_z \cos(k_z z)\, \epsilon'_x + i\frac{\omega}{c} \cos(k_z z)\, i\mu\varepsilon \frac{\omega}{k_z c} \epsilon'_x = \frac{\partial \epsilon_z}{\partial x},$$

que fornece

$$\cos(k_z z)\, \epsilon'_x = \frac{k_z}{k_z^2 - \mu\varepsilon \frac{\omega^2}{c^2}} \frac{\partial \epsilon_z}{\partial x}.$$

Vemos dessas equações que

$$\epsilon_z = \cos(k_z z)\, \epsilon'_z,$$

com

$$\epsilon'_z = \epsilon'_z(x, y, t).$$

Em resumo, portanto,

$$\boldsymbol{\epsilon}_t = \frac{k_z \mathrm{sen}\,(k_z z)}{k_z^2 - \mu\varepsilon \frac{\omega^2}{c^2}} \boldsymbol{\nabla}_t \epsilon'_z$$

e

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\beta}_t &= -i\mu\varepsilon\frac{\omega}{k_z c}\cos(k_z z)\,\hat{\mathbf{z}}\times\boldsymbol{\epsilon}_t' \\ &= -i\mu\varepsilon\frac{\omega}{c}\frac{\cos(k_z z)}{k_z^2-\mu\varepsilon\frac{\omega^2}{c^2}}\hat{\mathbf{z}}\times\boldsymbol{\nabla}_t\epsilon_z'\end{aligned}$$

Dessa forma, se encontrarmos ϵ_z', facilmente obteremos ϵ_x, ϵ_y, $\epsilon_z = \cos(k_z z)\,\epsilon_z'$, β_x e β_y. Para obtermos ϵ_z, utilizamos a equação de onda:

$$\nabla^2\epsilon_z + \mu\varepsilon\frac{\omega^2}{c^2}\epsilon_z = 0.$$

Com o ansatz para a dependência em z, obtemos a equação para ϵ_z':

$$\frac{\partial^2\epsilon_z'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\epsilon_z'}{\partial y^2} + \left(\mu\varepsilon\frac{\omega^2}{c^2} - k_z^2\right)\epsilon_z' = 0.$$

Como a componente tangencial do campo elétrico à superfície lateral da cavidade ressonante deve ser nula, pois o campo elétrico dentro de um condutor ideal é nulo e a componente tangencial do campo elétrico é contínua, segue que

$$\hat{\mathbf{n}}\times\boldsymbol{\epsilon}\big|_S = \mathbf{0},$$

isto é,

$$\left(n_x\hat{\mathbf{x}} + n_y\hat{\mathbf{y}}\right)\times\left(\hat{\mathbf{x}}\epsilon_x + \hat{\mathbf{y}}\epsilon_y + \hat{\mathbf{z}}\epsilon_z\right)\big|_S = 0,$$

ou seja,

$$\hat{\mathbf{z}}\left(n_x\epsilon_y - n_y\epsilon_x\right) - \hat{\mathbf{y}}n_x\epsilon_z + \hat{\mathbf{x}}n_y\epsilon_z\big|_S = 0$$

e, portanto,

$$n_x\epsilon_y - n_y\epsilon_x\big|_S = 0,$$

$$n_x\epsilon_z\big|_S = 0$$

e

$$n_y\epsilon_z\big|_S = 0.$$

A normal tem apenas as componentes n_x e n_y e

$$n_x^2 + n_y^2 = 1.$$

Logo, porque as componentes da normal, n_x e n_y, não podem ser ambas nulas, segue que a condição de contorno para os modos TM é

$$\epsilon_z\big|_S = 0,$$

isto é,

$$\cos(k_z z)\,\epsilon_z'\big|_S = 0.$$

ou seja, como essa igualdade deve valer na superfície lateral para todo z entre 0 e d, segue que

$$\epsilon_z'\big|_S = 0.$$

Frequências de ressonância

Das equações de onda

$$\frac{\partial^2 \beta'_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \beta'_z}{\partial y^2} + \left(\mu\varepsilon\frac{\omega^2}{c^2} - k_z^2\right)\beta'_z \quad = \quad 0$$

e

$$\frac{\partial^2 \epsilon'_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \epsilon'_z}{\partial y^2} + \left(\mu\varepsilon\frac{\omega^2}{c^2} - k_z^2\right)\epsilon'_z \quad = \quad 0,$$

como para modos TE e TM

$$k_z \quad = \quad \frac{p\pi}{d},$$

com $p = 0, 1, 2, \ldots$ para modos TM e $p = 1, 2, \ldots$ para modos TE, segue

$$k_x^2 + k_y^2 + \left(\frac{p\pi}{d}\right)^2 \quad = \quad \mu\varepsilon\frac{\omega^2}{c^2}.$$

As equações acima juntamente com suas respectivas condições de contorno representam problemas de Sturm-Liouville, ou seja, problemas de auto-vetores e auto-valores. Assim, para cada auto-função teremos um valor discreto correspondente para $k_x^2 + k_y^2$, que podemos denotar como λ_m^2, onde $m = 0, 1, 2, \ldots$ são os índices escolhidos para designar os correspondentes auto-valores. Logo, a cavidade ressonante somente poderá conter ondas eletromagnéticas estacionárias com frequências discretas dadas por

$$\omega_{p,m} \quad = \quad \frac{c}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\sqrt{\lambda_m^2 + \left(\frac{p\pi}{d}\right)^2}.$$

Essas são as chamadas frequências de ressonância da cavidade. É importante notarmos que essas frequências correspondem a linhas espectrais da cavidade infinitamente estreitas para um condutor ideal. Na prática, no entanto, como a condutividade de um material condutor é sempre finita, há absorção da energia das ondas eletromagnéticas pelas paredes da cavidade. Esse fato implica em uma largura finita para as linhas espectrais da cavidade.