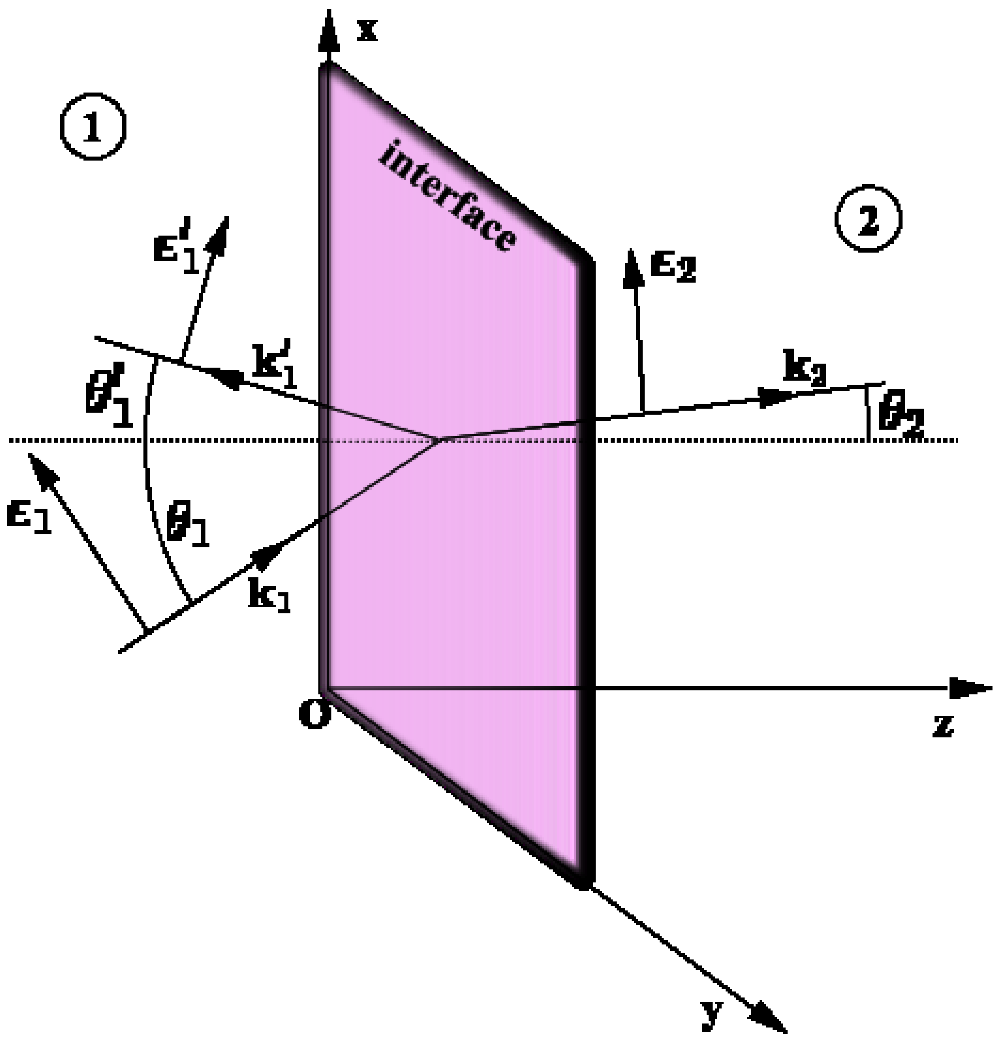
Reflexão e refração de ondas eletromagnéticas em interfaces planas entre dielétricos

Para ilustrar a utilização das condições de contorno para os campos, tratemos a reflexão e a refração de ondas eletromagnéticas planas por interfaces entre dielétricos lineares, homogêneos e isotrópicos. Para não trivializar a discussão, vamos considerar que o vetor de onda incidente não seja paralelo à interface entre os dois meios dielétricos. Há dois casos linearmente independentes que consideramos abaixo.

Campo elétrico paralelo ao plano de incidência



Nesse caso, escolhemos o sistema de coordenadas de forma que a interface entre os dois meios dielétricos coincida com o plano xy. Também indexamos os meios dielétricos de modo que o meio 1 tenha $z < 0$ e o meio 2 tenha $z > 0$. Assim, a normal à interface é o versor $\hat{\mathbf{z}}$. O plano de incidência é formado pelo vetor de onda incidente, $\mathbf{k}_1$, e pela normal à interface, $\hat{\mathbf{z}}$. Escolhemos o plano de incidência como o plano xz. Como a incidência não é normal à interface, temos

$$\mathbf{k}_1 \quad = \quad \hat{\mathbf{z}} k_1 \cos\theta_1 + \hat{\mathbf{x}} k_1 \sin\theta_1,$$

onde k_1 é o módulo do vetor $\mathbf{k}_1$ e θ_1 é o ângulo de incidência, isto é, o ângulo entre o vetor de onda, $\mathbf{k}_1$, e a normal à interface,$\hat{\mathbf{z}}$. Escolhemos polarização plana e o campo elétrico incidente paralelo ao plano de incidência, ou seja,

$$\boldsymbol{\epsilon}_1 \quad = \quad \left(-\hat{\mathbf{z}}\epsilon_{01}\sin\theta_1 + \hat{\mathbf{x}}\epsilon_{01}\cos\theta_1\right)\exp\left(izk_1\cos\theta_1 + ixk_1\sin\theta_1 - i\omega t\right).$$

Por isotropia e homogeneidade dos meios dielétricos, as ondas refletida e refratada têm polarizações planas também paralelas ao plano de incidência e podemos escrever

$$\boldsymbol{\epsilon}_1' = \left(\hat{\mathbf{z}}\epsilon_{01}' \sin\theta_1' + \hat{\mathbf{x}}\epsilon_{01}' \cos\theta_1'\right) \exp\left(-izk_1 \cos\theta_1' + ixk_1 \sin\theta_1' - i\omega t\right),$$

para a onda refletida, com

$$\mathbf{k}_1' = -\hat{\mathbf{z}}k_1 \cos\theta_1' + \hat{\mathbf{x}}k_1 \sin\theta_1',$$

e

$$\boldsymbol{\epsilon}_2 = \left(-\hat{\mathbf{z}}\epsilon_{02} \sin\theta_2 + \hat{\mathbf{x}}\epsilon_{02} \cos\theta_2\right) \exp\left(izk_2 \cos\theta_2 + ixk_2 \sin\theta_2 - i\omega t\right),$$

para a onda refratada, com

$$\mathbf{k}_2 = \hat{\mathbf{z}}k_2 \cos\theta_2 + \hat{\mathbf{x}}k_2 \sin\theta_2.$$

Notemos que já escolhemos os campos elétricos de modo a serem ortogonais aos respectivos vetores de onda. Os ângulos θ_1' e θ_2 são, respectivamente, os ângulos de reflexão e refração.

Utilizando a Lei de Indução de Faraday,

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\epsilon} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{\beta}}{\partial t},$$

e a definição de índice de refração, obtemos

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\beta}_1 &= \frac{c\mathbf{k}_1}{\omega} \times \boldsymbol{\epsilon}_1 \\
&= n_1\epsilon_{01}\left(\hat{\mathbf{z}}\cos\theta_1 + \hat{\mathbf{x}}\sin\theta_1\right) \times \left(-\hat{\mathbf{z}}\sin\theta_1 + \hat{\mathbf{x}}\cos\theta_1\right) \exp\left(i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r} - i\omega t\right) \\
&= n_1\epsilon_{01}\left(\hat{\mathbf{z}} \times \hat{\mathbf{x}}\cos^2\theta_1 - \hat{\mathbf{x}} \times \hat{\mathbf{z}}\sin^2\theta_1\right) \exp\left(i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r} - i\omega t\right) \\
&= \hat{\mathbf{y}} n_1\epsilon_{01} \exp\left(i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r} - i\omega t\right).
\end{aligned}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\beta}_1' &= n_1\epsilon_{01}'\left(-\hat{\mathbf{z}} \times \hat{\mathbf{x}}\cos\theta_1'\cos\theta_1' + \hat{\mathbf{x}} \times \hat{\mathbf{z}}\sin\theta_1'\sin\theta_1'\right) \exp\left(i\mathbf{k}_1' \cdot \mathbf{r} - i\omega t\right) \\
&= -\hat{\mathbf{y}} n_1\epsilon_{01}' \exp\left(i\mathbf{k}_1' \cdot \mathbf{r} - i\omega t\right)
\end{aligned}$$

e

$$\boldsymbol{\beta}_2 = \hat{\mathbf{y}} n_2\epsilon_{02} \exp\left(i\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r} - i\omega t\right).$$

Na ausência de cargas e correntes livres, devemos ter

$$\hat{\mathbf{z}} \cdot \left(\varepsilon_2\boldsymbol{\epsilon}_2 - \varepsilon_1\boldsymbol{\epsilon}_1 - \varepsilon_1\boldsymbol{\epsilon}_1'\right)\big|_{z=0} = 0,$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
0 &= -\varepsilon_2\epsilon_{02}\sin\theta_2 \exp\left(ixk_2\sin\theta_2\right) + \varepsilon_1\epsilon_{01}\sin\theta_1 \exp\left(ixk_1\sin\theta_1\right) \\
&- \varepsilon_1\epsilon_{01}'\sin\theta_1' \exp\left(ixk_1\sin\theta_1'\right)
\end{aligned}$$

para todo valor de x. Pela independência linear de exponenciais com argumentos distintos, concluímos que

$$k_1 \sin\theta_1' = k_1 \sin\theta_1,$$

$$k_2 \sin\theta_2 = k_1 \sin\theta_1$$

e, portanto,

$$-\varepsilon_2\epsilon_{02}\sin\theta_2 + \varepsilon_1\epsilon_{01}\sin\theta_1 - \varepsilon_1\epsilon_{01}'\sin\theta_1 = 0.$$

A equação

$$k_1 \sin\theta_1' = k_1 \sin\theta_1$$

dá a lei de reflexão, isto é,

$$\theta_1' = \theta_1.$$

A equação

$$k_2 \sin\theta_2 = k_1 \sin\theta_1$$

dá a Lei de Refração de Snell-Descartes, ou seja,

$$n_2 \sin\theta_2 = n_1 \sin\theta_1.$$

Como a componente tangente à interface do campo intensidade magnética é contínua no presente caso, obtemos

$$\hat{\mathbf{z}} \times \left(\frac{1}{\mu_2}\boldsymbol{\beta}_2 - \frac{1}{\mu_1}\boldsymbol{\beta}_1 - \frac{1}{\mu_1}\boldsymbol{\beta}_1' \right)\bigg|_{z=0} = \mathbf{0}.$$

Para simplificar, vamos supor que os dielétricos sejam tais que $\mu_1 = \mu_2 = 1$, isto é, que os dielétricos sejam materiais não magnéticos. Assim,

$$\hat{\mathbf{z}} \times \hat{\mathbf{y}} \left(n_2\epsilon_{02} - n_1\epsilon_{01} + n_1\epsilon_{01}' \right) = \mathbf{0},$$

ou seja,

$$n_2\epsilon_{02} - n_1\epsilon_{01} + n_1\epsilon_{01}' = 0.$$

Usando a Lei de Snell-Descartes,

$$k_2 \sin\theta_2 = k_1 \sin\theta_1,$$

vemos que as equações

$$-\varepsilon_2\epsilon_{02}\sin\theta_2 + \varepsilon_1\epsilon_{01}\sin\theta_1 - \varepsilon_1\epsilon_{01}'\sin\theta_1 = 0$$

e

$$n_2\epsilon_{02} - n_1\epsilon_{01} + n_1\epsilon_{01}' = 0$$

são linearmente dependentes. Como a continuidade da componente normal do campo indução magnética está automaticamente satisfeita, resta-nos utilizar a continuidade da componente tangencial do campo elétrico:

$$\hat{\mathbf{z}} \times \left(\boldsymbol{\epsilon}_2 - \boldsymbol{\epsilon}_1 - \boldsymbol{\epsilon}_1' \right)\big|_{z=0} = \mathbf{0}.$$

Essa equação nos dá

$$\epsilon_{02}\cos\theta_2 - \epsilon_{01}\cos\theta_1 - \epsilon_{01}'\cos\theta_1 = 0.$$

Resolvendo o sistema de equações

$$n_2\epsilon_{02} - n_1\epsilon_{01} + n_1\epsilon_{01}' = 0$$

e

$$\epsilon_{02}\cos\theta_2 - \epsilon_{01}\cos\theta_1 - \epsilon_{01}'\cos\theta_1 = 0,$$

obtemos

$$\epsilon_{01}' = \frac{n_1\cos\theta_2 - n_2\cos\theta_1}{n_2\cos\theta_1 + n_1\cos\theta_2}\epsilon_{01}$$

$$\epsilon_{02} = \frac{2n_1\cos\theta_1}{n_2\cos\theta_1 + n_1\cos\theta_2}\epsilon_{01}.$$

Os coeficientes de Fresnel para esse caso são definidos como

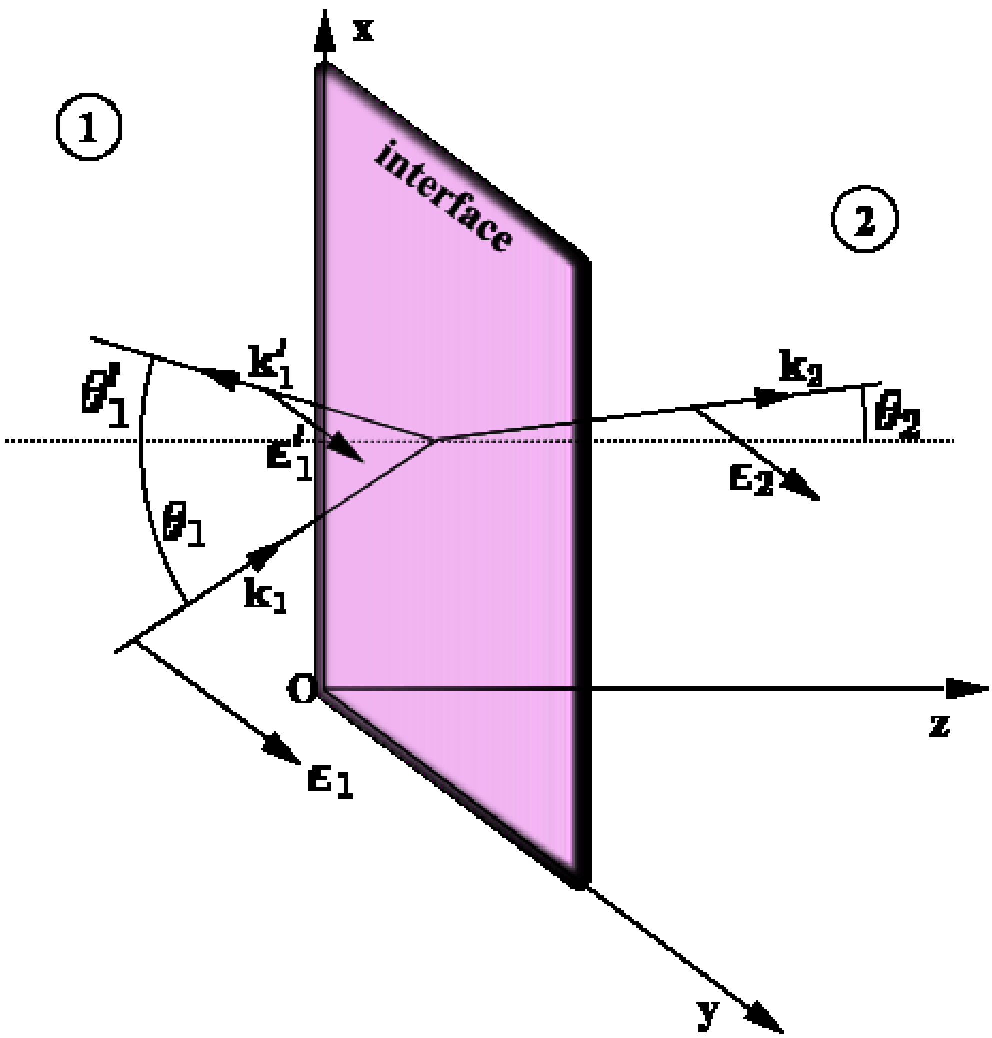
$$
\begin{aligned}
r_{12p} &= \frac{\epsilon'_{01}}{\epsilon_{01}} \\
&= \frac{n_1 \cos\theta_2 - n_2 \cos\theta_1}{n_2 \cos\theta_1 + n_1 \cos\theta_2},
\end{aligned}
$$

para reflexão, e

$$
\begin{aligned}
t_{12p} &= \frac{\epsilon_{02}}{\epsilon_{01}} \\
&= \frac{2n_1 \cos\theta_1}{n_2 \cos\theta_1 + n_1 \cos\theta_2},
\end{aligned}
$$

para transmissão.

Campo elétrico perpendicular ao plano de incidência



Nesse caso, tomamos

$$
\begin{aligned}
\mathbf{k}_1 &= \hat{\mathbf{z}} k_1 \cos\theta_1 + \hat{\mathbf{x}} k_1 \sin\theta_1, \\
\mathbf{k}'_1 &= -\hat{\mathbf{z}} k_1 \cos\theta_1 + \hat{\mathbf{x}} k_1 \sin\theta_1, \\
\mathbf{k}_2 &= \hat{\mathbf{z}} k_2 \cos\theta_2 + \hat{\mathbf{x}} k_2 \sin\theta_2,
\end{aligned}
$$

como no caso anterior, mas escolhemos os campos elétricos polarizados ao longo do eixo y, isto é,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\epsilon}_1 &= \hat{\mathbf{y}}\epsilon_{01}\exp\left(izk_1\cos\theta_1 + ixk_1\sin\theta_1 - i\omega t\right), \\ \boldsymbol{\epsilon}_1' &= \hat{\mathbf{y}}\epsilon_{01}'\exp\left(-izk_1\cos\theta_1 + ixk_1\sin\theta_1 - i\omega t\right), \\ \boldsymbol{\epsilon}_2 &= \hat{\mathbf{y}}\epsilon_{02}\exp\left(izk_2\cos\theta_2 + ixk_2\sin\theta_2 - i\omega t\right),\end{aligned}$$

onde já estamos adiantando que vale a lei de reflexão. Assim, usando a Lei de Indução de Faraday,

$$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{\epsilon} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{\beta}}{\partial t},$$

obtemos

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\beta}_1 &= \frac{c\mathbf{k}_1}{\omega}\times\boldsymbol{\epsilon}_1 \\ &= n_1\left(\hat{\mathbf{z}}\cos\theta_1 + \hat{\mathbf{x}}\sin\theta_1\right)\times\hat{\mathbf{y}}\epsilon_{01}\exp\left(i\mathbf{k}_1\cdot\mathbf{r} - i\omega t\right) \\ &= n_1\left(-\hat{\mathbf{x}}\cos\theta_1 + \hat{\mathbf{z}}\sin\theta_1\right)\epsilon_{01}\exp\left(i\mathbf{k}_1\cdot\mathbf{r} - i\omega t\right),\end{aligned}$$

$$\boldsymbol{\beta}_1' = n_1\left(\hat{\mathbf{x}}\cos\theta_1 + \hat{\mathbf{z}}\sin\theta_1\right)\epsilon_{01}'\exp\left(i\mathbf{k}_1'\cdot\mathbf{r} - i\omega t\right)$$

e

$$\boldsymbol{\beta}_2 = n_1\left(-\hat{\mathbf{x}}\cos\theta_2 + \hat{\mathbf{z}}\sin\theta_2\right)\epsilon_{02}\exp\left(i\mathbf{k}_2\cdot\mathbf{r} - i\omega t\right).$$

Como a componente tangencial do campo elétrico é contínua na interface, temos

$$\hat{\mathbf{z}}\times\left(\boldsymbol{\epsilon}_2 - \boldsymbol{\epsilon}_1 - \boldsymbol{\epsilon}_1'\right)\Big|_{z=0} = \mathbf{0},$$

ou seja,

$$\epsilon_{02} - \epsilon_{01} - \epsilon_{01}' = 0.$$

Também impomos que a componente tangencial do campo intensidade magnética seja contínua, obtendo

$$\hat{\mathbf{z}}\times\left(\frac{1}{\mu_2}\boldsymbol{\beta}_2 - \frac{1}{\mu_1}\boldsymbol{\beta}_1 - \frac{1}{\mu_1}\boldsymbol{\beta}_1'\right)\Bigg|_{z=0} = \mathbf{0},$$

isto é, supondo meios não magnéticos, ou seja, $\mu_1 = \mu_2 = 1$, vem

$$-n_2\cos\theta_2\epsilon_{02} + n_1\cos\theta_1\epsilon_{01} - n_1\cos\theta_1\epsilon_{01}' = 0.$$

Agora resolvemos as equações

$$\epsilon_{02} - \epsilon_{01} - \epsilon_{01}' = 0$$

e

$$-n_2\cos\theta_2\epsilon_{02} + n_1\cos\theta_1\epsilon_{01} - n_1\cos\theta_1\epsilon_{01}' = 0$$

e concluímos que

$$\epsilon_{01}' = \frac{n_1\cos\theta_1 - n_2\cos\theta_2}{n_1\cos\theta_1 + n_2\cos\theta_2}\epsilon_{01}$$

e

$$\epsilon_{02} = \frac{2n_1\cos\theta_1}{n_1\cos\theta_1 + n_2\cos\theta_2}\epsilon_{01}.$$

Os coeficientes de Fresnel para esse caso são definidos como

$$\begin{aligned}r_{12s} &= \frac{\epsilon_{01}'}{\epsilon_{01}} \\ &= \frac{n_1\cos\theta_1 - n_2\cos\theta_2}{n_1\cos\theta_1 + n_2\cos\theta_2},\end{aligned}$$

para reflexão, e

$$\begin{aligned}t_{12s} &= \frac{\epsilon_{02}}{\epsilon_{01}} \\ &= \frac{2n_1\cos\theta_1}{n_1\cos\theta_1 + n_2\cos\theta_2},\end{aligned}$$

para transmissão.