Frequência de Plasma

No modelo de dispersão da luz em meios materiais de Drude-Lorentz, definimos, então como uma mera conveniência, a chamada frequência de plasma,

$$\omega_p^2 = \frac{4\pi N n_1 e^2}{m},$$

onde N representa o número de moléculas por unidade de volume, n é o número de elétrons do tipo 1 em cada molécula, e é a carga de um elétron e m é sua massa. Aqui vou mencionar a razão de chamarmos essa quantidade de frequência de plasma. Para um meio condutor, a susceptibilidade elétrica complexa escreve-se

$$\begin{aligned}\chi_c'(\omega) &= \sum_k \frac{N n_k e^2}{m\left(\omega_k^2 - \omega^2 - i\gamma_k\omega\right)} + \frac{N n_0 e^2}{m\left(-\omega^2 - i\gamma_0\omega\right)} \\ &= \chi_c(\omega) - \frac{N n_0 e^2}{m\omega\left(\omega + i\gamma_0\right)}\end{aligned}$$

e, para frequências suficientemente altas, podemos desprezar γ_0 frente a ω e escrever

$$\chi_c'(\omega) \approx \chi_c(\omega) - \frac{N n_0 e^2}{m\omega^2}.$$

Com isso, a constante dielétrica complexa pode ser expressa por

$$\begin{aligned}K_c &= 1 + 4\pi\chi_c(\omega) - \frac{4\pi N n_0 e^2}{m\omega^2} \\ &= 1 + 4\pi\chi_c(\omega) - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}.\end{aligned}$$

Como a equação de onda para o campo elétrico nessas circunstâncias é dada por

$$\nabla^2\boldsymbol{\epsilon} - \frac{K_c}{c^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{\epsilon}}{\partial t^2} = \mathbf{0},$$

segue que uma onda plana propagando-se ao longo do eixo z tem o campo elétrico dado, por exemplo, por

$$\boldsymbol{\epsilon} = \hat{\mathbf{x}} E_0 \exp\left(ikz - i\omega t\right),$$

onde, em virtude da equação de onda acima,

$$\begin{aligned}k^2 &= K_c\frac{\omega^2}{c^2} \\ &= \left(1 + 4\pi\chi_c(\omega) - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right)\frac{\omega^2}{c^2}.\end{aligned}$$

Logo, essa é uma onda evanescente, pois k é um número complexo. Sendo assim, podemos escrever

$$\boldsymbol{\epsilon} = \hat{\mathbf{x}} E_0 \exp\left(-k_i z\right) \exp\left(i k_r z - i\omega t\right),$$

onde

$$\begin{aligned} k_r &= \mathrm{Re}\left(k\right), \\ k_i &= \mathrm{Im}\left(k\right). \end{aligned}$$

Se k for imaginário, então a onda não poderá propagar-se no meio, sendo refletida após uma pequena penetração. Isso acontece se ω for suficientemente menor do que ω_p para termos a parte real de

$$k = \sqrt{\left(1 + 4\pi\chi_c\left(\omega\right) - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right)\frac{\omega^2}{c^2}}$$

desprezível. Esse é um comportamento típico de metais para frequências ópticas. No entanto, para frequências na região ultravioleta do espectro eletromagnético, os metais voltam a ter k_r não desprezível e as ondas são propagadas no meio condutor. Esse fenômeno é conhecido como a "transparência ultravioleta dos metais".

A razão de utilizarmos o nome "frequência de plasma" vem do fato de que em um plasma, onde todas as cargas estão livres e não há amortecimento, escrevemos

$$k = \sqrt{\left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right)\frac{\omega^2}{c^2}},$$

pois, nesse caso,

$$\begin{aligned} \chi_c'\left(\omega\right) &= -\sum_k \frac{N n_k e^2}{m\omega^2} - \frac{N n_0 e^2}{m\omega^2} \\ &= -\frac{Ne^2}{m\omega^2}\left(\sum_k n_k + n_0\right). \end{aligned}$$

Mas, como no lugar de cada molécula, nesse caso, há um elétron,

$$\sum_k n_k + n_0 = 1$$

e, com isso,

$$\omega_p^2 = \frac{4\pi N e^2}{m}.$$

Portanto,

$$kc = \sqrt{\omega^2 - \omega_p^2},$$

que é imaginário puro quando $\omega < \omega_p$, mas torna-se real quando $\omega > \omega_p$. Vemos, assim, que o caso de um condutor nas circunstâncias que tratamos acima exibe um comportamento similar ao de um plasma. Nada mais natural, portanto, do que definirmos uma frequência de plasma para condutores.