Equações do eletromagnetismo

As equações de Maxwell são constituídas pela Lei de Gauss,

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{E} \quad = \quad 4\pi\rho,$$

pelo fato de que não há monopolos magnéticos,

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{B} \quad = \quad 0,$$

pela Lei de Indução de Faraday,

$$\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{E} \quad = \quad -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

e pela Lei de Ampère-Maxwell,

$$\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{B} \quad = \quad \frac{4\pi}{c}\mathbf{J} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}.$$

Essas equações são a base da teoria do campo eletromagnético. No entanto, em nossas discussões aqui, estaremos utilizando várias outras equações úteis, além das de Maxwell. Uma delas é a equação de movimento para uma partícula carregada, dada em termos da força de Lorentz:

$$\mathbf{F} \quad = \quad q\mathbf{E} + \frac{q}{c}\mathbf{v} \times \mathbf{B},$$

onde q é a carga da partícula, $\mathbf{v}$ é sua velocidade e c é a magnitude da velocidade da luz no vácuo. Como a carga é sempre conservada, há também a equação da continuidade,

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad = \quad 0,$$

que, para recordar, vamos deduzi-la. A carga total em uma região de volume V somente varia se houver fluxo de carga através da superfície S de V. Assim,

$$\frac{dQ}{dt} \quad = \quad -\oint_S da\, \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{J},$$

onde o sinal de menos é necessário, pois $\hat{\mathbf{n}}$ é, por convenção, a normal externa à superfície fechada S e a carga Q é a que está na região V. Assim, se a carga aumentar em V, é porque há corrente através de S no sentido de fora para dentro. Podemos utilizar o teorema da divergência e obter:

$$\frac{dQ}{dt} \quad = \quad -\int_V d^3r\, \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{J}.$$

Como o volume V é arbitrário e

$$\begin{aligned}
\frac{dQ}{dt} \quad &= \quad \frac{d}{dt}\int_V d^3r\, \rho\left(\mathbf{r}, t\right) \\
&= \quad \int_V d^3r\, \frac{\partial \rho\left(\mathbf{r}, t\right)}{\partial t},
\end{aligned}$$

segue a equação da continuidade:

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial \rho(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = 0.$$

Como explicado quando discutimos transformações de calibre, o calibre ou gauge de Lorentz é dado por

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0.$$

Nesse calibre, os potenciais vetorial e escalar retardados, que sempre vamos utilizar em nossas discussões, são dados por

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \int d^3 r' \, \frac{\rho\left(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c}\right)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

e

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c} \int d^3 r' \, \frac{\mathbf{J}\left(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c}\right)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|},$$

conforme deduzimos quando discutimos a função de Green para a equação de onda. Com essas soluções dos potenciais, os campos são obtidos destas relações:

$$\mathbf{B} = \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A}$$

e

$$\mathbf{E} = -\boldsymbol{\nabla} \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}.$$