As equações de onda no vácuo

Tomando o rotacional de ambos os membros da Lei de Indução de Faraday, que, como vimos é

$$\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t},$$

obtemos

$$\boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{E}) = -\boldsymbol{\nabla} \times \left(\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\right),$$

ou seja,

$$\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial(\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{B})}{\partial t}.$$

Considerando uma região do espaço onde não haja cargas ou correntes livres, então $\rho = 0$, $\mathbf{J} = \mathbf{0}$ e as Leis de Gauss e de Ampère-Maxwell ficam

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{E} &= 0, \\ \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{B} &= \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \end{aligned}$$

Logo, a equação acima,

$$\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial(\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{B})}{\partial t},$$

pode ser reescrita como

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \mathbf{0}.$$

Essa é a equação de onda para o campo elétrico.

Podemos também obter a equação de onda para o campo indução magnética. Para isso, podemos tomar o rotacional de ambos os membros da Lei de Ampère-Maxwell com $\rho = 0$ e $\mathbf{J} = \mathbf{0}$ para obter

$$\boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{B}) = \frac{1}{c}\boldsymbol{\nabla} \times \left(\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\right),$$

ou seja,

$$\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{B}) - \nabla^2 \mathbf{B} = \frac{1}{c}\frac{\partial(\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{E})}{\partial t}.$$

Usando o fato de não haver monopolos magnéticos e a Lei de Indução de Faraday, isto é,

$$\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t},$$

obtemos

$$\nabla^2 \mathbf{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = \mathbf{0},$$

que é a equação de onda para o campo indução magnética.