A dispersão normal e a dispersão anômala

Quando estudamos o modelo de Drude-Lorentz, vimos que a polarização não é proporcional ao campo elétrico, nesse modelo. No entanto, podemos definir a polarização complexa, $\boldsymbol{\mathcal{P}}$, que é proporcional ao campo elétrico complexo:

$$\boldsymbol{\mathcal{P}} = \left[\sum_k \frac{Nn_k e^2}{m\left(\omega_k^2 - \omega^2 - i\gamma_k\omega\right)}\right]\mathbf{E}_0 \exp\left(-i\omega t\right),$$

onde, analogamente ao campo elétrico, a polarização física é dada pela parte real da polarização complexa:

$$\mathbf{P} = \operatorname{Re}\left(\boldsymbol{\mathcal{P}}\right).$$

Continuando a analogia com o caso eletrostático, podemos definir uma susceptibilidade elétrica complexa como

$$\chi_c = \sum_k \frac{Nn_k e^2}{m\left(\omega_k^2 - \omega^2 - i\gamma_k\omega\right)}.$$

Notemos, no entanto, que não podemos afirmar que a parte real dessa quantidade dá a susceptibilidade física do meio, pois, como vimos, a polarização física não é proporcional ao campo elétrico físico.

Com essas definições, também faz sentido falarmos de um campo deslocamento complexo, definido por

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\mathcal{D}} &= \boldsymbol{\epsilon} + 4\pi\boldsymbol{\mathcal{P}}\\ &= \left(1 + 4\pi\chi_c\right)\boldsymbol{\epsilon}\\ &= K_c\boldsymbol{\epsilon},\end{aligned}$$

onde também definimos a constante dielétrica complexa,

$$K_c = 1 + 4\pi\chi_c.$$

Supondo que o meio não seja magnético, podemos escrever a Lei de Ampère-Maxwell complexa como

$$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{\beta} = \frac{K_c}{c}\frac{\partial\boldsymbol{\epsilon}}{\partial t}.$$

Essa equação e as outras equações de Maxwell para os campos complexos fornecem a equação de onda

$$\nabla^2\boldsymbol{\epsilon} - \frac{K_c}{c^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{\epsilon}}{\partial t^2} = \mathbf{0}.$$

Essa é a equação de onda para o campo elétrico complexo macroscópico que se propaga no meio dispersivo. Uma onda plana propagando-se ao longo do eixo z tem o campo elétrico dado, por exemplo, por

$$\boldsymbol{\epsilon} = \hat{\mathbf{x}}E_0 \exp\left(ikz - i\omega t\right),$$

onde, em virtude da equação de onda acima,

$$\begin{aligned}k^2 &= K_c\frac{\omega^2}{c^2}\\ &= \left(1 + 4\pi\chi_c\right)\frac{\omega^2}{c^2}.\end{aligned}$$

Logo, essa é uma onda evanescente, pois k é um número complexo. Sendo assim, podemos escrever

$$\boldsymbol{\epsilon} = \hat{\mathbf{x}}E_0 \exp\left(-k_i z\right)\exp\left(ik_r z - i\omega t\right),$$

onde

$$\begin{aligned}k_r &= \operatorname{Re}\left(k\right),\\ k_i &= \operatorname{Im}\left(k\right).\end{aligned}$$

Agora fica fácil constatarmos que a parte imaginária de k está relacionada à absorção da energia da luz incidente pelo meio e a parte real de k está relacionada à dispersão da luz no meio. Podemos definir o índice de refração, portanto, como

$$n = \frac{c}{\omega}k_r,$$

já que a velocidade de propagação da onda plana evanescente acima é dada por ω/k_r.

Para calcularmos o índice de refração, podemos escrever

$$\begin{aligned} k^2 &= k_r^2 - k_i^2 + 2ik_rk_i \\ &= (1+4\pi\chi_c)\frac{\omega^2}{c^2}. \end{aligned}$$

Assim, devemos resolver o sistema de equações:

$$\begin{aligned} k_r^2 - k_i^2 &= [1+4\pi\mathrm{Re}(\chi_c)]\frac{\omega^2}{c^2}, \\ 2k_rk_i &= 4\pi\mathrm{Im}(\chi_c)\frac{\omega^2}{c^2}. \end{aligned}$$

Para simplificar nossa análise e, ao mesmo tempo, manter a física do problema intacta, suponhamos que estejamos bem próximos da primeira ressonância na expressão

$$\chi_c = \sum_k \frac{Nn_ke^2}{m(\omega_k^2 - \omega^2 - i\gamma_k\omega)},$$

isto é,

$$\omega \approx \omega_1.$$

Nesse caso, mantendo apenas o termo mais importante, podemos escrever

$$\begin{aligned} \chi_c &\approx \frac{Nn_1e^2}{m(\omega_1^2 - \omega^2 - i\gamma_1\omega)} \\ &= a + bi, \end{aligned}$$

com

$$a = \frac{Nn_1e^2(\omega_1^2 - \omega^2)}{m\left[(\omega_1^2-\omega^2)^2 + (\gamma_1\omega)^2\right]}$$

e

$$b = \frac{Nn_1e^2\gamma_1\omega}{m\left[(\omega_1^2-\omega^2)^2 + (\gamma_1\omega)^2\right]}.$$

Notemos que

$$a = \frac{(\omega_1^2 - \omega^2)}{\gamma_1\omega}b.$$

Para tornar essas expressões ainda mais simples, podemos utilizar a chamada frequência de plasma,

$$\omega_p^2 = \frac{4\pi Nn_1e^2}{m}.$$

Resolvamos agora:

$$\begin{aligned} k_r^2 - k_i^2 &= (1+4\pi a)\frac{\omega^2}{c^2}, \\ 2k_rk_i &= 4\pi b\frac{\omega^2}{c^2}. \end{aligned}$$

Temos

$$k_r^2 - \frac{1}{4k_r^2}\left(4\pi b\frac{\omega^2}{c^2}\right)^2 = (1+4\pi a)\frac{\omega^2}{c^2},$$

ou seja,

$$k_r^4 - (1+4\pi a)\frac{\omega^2}{c^2}k_r^2 - \frac{1}{4}\left(4\pi b\frac{\omega^2}{c^2}\right)^2 = 0,$$

cujas soluções são

$$k_r^2 = (1+4\pi a)\frac{\omega^2}{2c^2} \pm \frac{\omega^2}{2c^2}\sqrt{(1+4\pi a)^2 + (4\pi b)^2}.$$

Como $k_r \in \mathbb{R}$, a solução aceitável é

$$k_r^2 = (1+4\pi a)\frac{\omega^2}{2c^2} + \frac{\omega^2}{2c^2}\sqrt{(1+4\pi a)^2 + (4\pi b)^2},$$

isto é,

$$k_r = \frac{\omega}{c}\sqrt{\frac{1+4\pi a+\sqrt{(1+4\pi a)^2+(4\pi b)^2}}{2}}.$$

Como

$$n = \frac{c}{\omega}k_r,$$

temos

$$n = \sqrt{\frac{1+4\pi a+\sqrt{(1+4\pi a)^2+(4\pi b)^2}}{2}}.$$

Tomemos $\omega \approx \omega_1$, de forma que possamos aproximar:

$$\begin{aligned}\omega_1^2 - \omega^2 &= (\omega_1+\omega)(\omega_1-\omega) \\ &\approx 2\omega_1(\omega_1-\omega).\end{aligned}$$

Assim, usando a definição da frequência de plasma,

$$\omega_p^2 = \frac{4\pi N n_1 e^2}{m},$$

obtemos

$$\begin{aligned}4\pi a &\approx \frac{\omega_p^2 2\omega_1(\omega_1-\omega)}{4\omega_1^2(\omega_1-\omega)^2+(\gamma_1\omega_1)^2} \\ &= \frac{1}{2\omega_1}\left[\frac{\omega_p^2(\omega_1-\omega)}{(\omega_1-\omega)^2+\gamma_1^2/4}\right]\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}4\pi b &\approx \frac{\omega_p^2\gamma_1}{4\omega_1(\omega_1-\omega)^2+(\gamma_1\omega_1)^2} \\ &= \frac{1}{4\omega_1}\left[\frac{\omega_p^2\gamma_1}{(\omega_1-\omega)^2+\gamma_1^2/4}\right].\end{aligned}$$

Notemos que a função

$$f(\omega) \;=\; \frac{\omega_p^2\gamma_1}{(\omega_1-\omega)^2+\gamma_1^2/4}$$

é uma lorentziana. Em termos dessa função, podemos escrever

$$4\pi a \;\approx\; \frac{(\omega_1-\omega)}{2\gamma_1\omega_1}f(\omega)$$

e

$$4\pi b \;\approx\; \frac{1}{4\omega_1}f(\omega)\,.$$

Com essas aproximações,

$$n \;\approx\; \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1+\frac{(\omega_1-\omega)}{2\gamma_1\omega_1}f(\omega)+\sqrt{\left[1+\frac{(\omega_1-\omega)}{2\gamma_1\omega_1}f(\omega)\right]^2+\left[\frac{1}{4\omega_1}f(\omega)\right]^2}}.$$

No entanto, quando a absorção é muito fraca, podemos supor $k_i \ll k_r$ e, portanto, as equações originais,

$$k_r^2-k_i^2 \;=\; (1+4\pi a)\,\frac{\omega^2}{c^2}$$

e

$$2k_rk_i \;=\; 4\pi b\frac{\omega^2}{c^2},$$

implicam em

$$\begin{aligned} k_r^2 &\approx (1+4\pi a)\,\frac{\omega^2}{c^2} \\ &\approx \left[1+\frac{(\omega_1-\omega)}{2\gamma_1\omega_1}f(\omega)\right]\frac{\omega^2}{c^2}, \end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned} n &= \frac{c}{\omega}k_r \\ &\approx \sqrt{1+\frac{(\omega_1-\omega)}{2\gamma_1\omega_1}f(\omega)}. \end{aligned}$$

Com a frequência suficientemente próxima à ressonância, podemos considerar

$$\left|\frac{(\omega_1-\omega)}{2\gamma_1\omega_1}f(\omega)\right| \;\ll\; 1.$$

Nesse caso,

$$n \;\approx\; 1+\frac{(\omega_1-\omega)}{4\gamma_1\omega_1}f(\omega)\,.$$

A função $n(\omega)-1$, nesse caso, tem um pico e passa a diminuir logo depois. Enquanto, para $\omega<\omega_1$, $n(\omega)$ cresce com ω, temos a chamada dispersão normal. Enquanto, para $\omega>\omega_1$, $n(\omega)$ diminui com ω, temos a chamada dispersão anômala.