A conservação de momentum linear em eletromagnetismo

Além do balanço de energia em eletromagnetismo, podemos também deduzir a lei de conservação de momentum linear. Para isso, consideramos um elemento de volume do espaço, d^3r, em que haja uma certa quantidade de carga dada por ρd^3r. Na presença dos campos $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$, essa carga sofre a ação da força de Lorentz:

$$d\mathbf{F} = d^3r\left(\rho\mathbf{E} + \frac{\rho}{c}\mathbf{v}\times\mathbf{B}\right).$$

Em uma região V do espaço, portanto, a força eletromagnética total sobre a matéria é dada por

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_V &= \int_V d^3r\left(\rho\mathbf{E} + \frac{\rho}{c}\mathbf{v}\times\mathbf{B}\right)\\ &= \int_V d^3r\left(\rho\mathbf{E} + \frac{1}{c}\mathbf{J}\times\mathbf{B}\right),\end{aligned}$$

Essa força nada mais é do que a variação do momentum das cargas dentro da região V, isto é,

$$\frac{d\mathbf{P}_m}{dt} = \int_V d^3r\left(\rho\mathbf{E} + \frac{1}{c}\mathbf{J}\times\mathbf{B}\right),$$

onde $\mathbf{P}_m$ é o momentum linear da matéria eletricamente carregada em V. Aqui desconsideraremos a existência de matéria neutra. Podemos expressar o integrando acima apenas em termos dos campos e não das fontes ρ e $\mathbf{J}$. Para isso, tomamos, da Lei de Gauss,

$$\rho = \frac{1}{4\pi}\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{E}$$

e, da Lei de Ampère-Maxwell,

$$\mathbf{J} = \frac{c}{4\pi}\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{B} - \frac{1}{4\pi}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}.$$

Logo, o integrando aparecendo no membro direito da equação de balanço de momentum fica

$$\begin{aligned}\rho\mathbf{E} + \frac{1}{c}\mathbf{J}\times\mathbf{B} &= \frac{1}{4\pi}\mathbf{E}\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{E} + \frac{1}{c}\left(\frac{c}{4\pi}\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{B} - \frac{1}{4\pi}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}\right)\times\mathbf{B}\\ &= \frac{1}{4\pi}\mathbf{E}\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{E} + \frac{1}{4\pi}\left(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{B}\right)\times\mathbf{B} - \frac{1}{4\pi c}\left(\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}\right)\times\mathbf{B}.\end{aligned}$$

Podemos usar a Lei de Indução de Faraday,

$$\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t},$$

para obter

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\right) \times \mathbf{B} &= \frac{\partial \mathbf{E} \times \mathbf{B}}{\partial t} - \mathbf{E} \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\
&= \frac{\partial \mathbf{E} \times \mathbf{B}}{\partial t} + c\mathbf{E} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{E}) .
\end{aligned}
$$

Assim,

$$
\begin{aligned}
\rho \mathbf{E} + \frac{1}{c}\mathbf{J} \times \mathbf{B} &= \frac{1}{4\pi}\mathbf{E}\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{E} + \frac{1}{4\pi}(\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} \\
&- \frac{1}{4\pi c}\frac{\partial \mathbf{E} \times \mathbf{B}}{\partial t} - \frac{1}{4\pi}\mathbf{E} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{E}) \\
&= \frac{1}{4\pi}\mathbf{E}\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{E} - \frac{1}{4\pi}\mathbf{E} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{E}) \\
&- \frac{1}{4\pi}\mathbf{B} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{B}) - \frac{1}{4\pi c}\frac{\partial \mathbf{E} \times \mathbf{B}}{\partial t} .
\end{aligned}
$$

Para podermos ter uma lei de balanço análoga à da energia, precisamos reposicionar o operador $\boldsymbol{\nabla}$ ou suas componentes de modo a obtermos, ao invés de uma integral volumétrica, integrais de superfície. Para ilustrar o que queremos, consideremos, primeiramente, os termos com $\mathbf{E}\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{E}$ e $\mathbf{E} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{E})$:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E}\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{E} &= \mathbf{E}\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial E_k}{\partial x_k} \\
&= \sum_{k=1}^{3}\mathbf{E}\frac{\partial E_k}{\partial x_k} \\
&= \sum_{k=1}^{3}\frac{\partial \mathbf{E}E_k}{\partial x_k} - \sum_{k=1}^{3}E_k\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x_k} \\
&= \sum_{k=1}^{3}\frac{\partial \mathbf{E}E_k}{\partial x_k} - \mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\nabla}\mathbf{E}
\end{aligned}
$$

e, como demonstrarei oportunamente,

$$
\mathbf{E} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{E}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{\nabla}(\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}) - \mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\nabla}\mathbf{E},
$$

dando

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E}\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{E} - \mathbf{E} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{E}) &= \sum_{k=1}^{3}\frac{\partial \mathbf{E}E_k}{\partial x_k} - \mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\nabla}\mathbf{E} - \frac{1}{2}\boldsymbol{\nabla}(\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}) + \mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\nabla}\mathbf{E} \\
&= \sum_{k=1}^{3}\frac{\partial \mathbf{E}E_k}{\partial x_k} - \frac{1}{2}\boldsymbol{\nabla}(\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}) .
\end{aligned}
$$

Com o Lema de Gauss, vem

$$\begin{aligned}
\int_V d^3r\left[\mathbf{E}\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{E}-\mathbf{E}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{E})\right] &= \int_V d^3r\left[\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial\mathbf{E}E_k}{\partial x_k}-\frac{1}{2}\boldsymbol{\nabla}(\mathbf{E}\cdot\mathbf{E})\right] \\
&= \sum_{k=1}^{3}\int_V d^3r\frac{\partial\mathbf{E}E_k}{\partial x_k}-\frac{1}{2}\int_V d^3r\boldsymbol{\nabla}(\mathbf{E}\cdot\mathbf{E}) \\
&= \sum_{k=1}^{3}\oint_{S(V)} da\, n_k\mathbf{E}E_k-\frac{1}{2}\oint_{S(V)} da\,\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{E}\cdot\mathbf{E}) \\
&= \oint_{S(V)} da\left(\sum_{k=1}^{3}n_kE_k\right)\mathbf{E}-\frac{1}{2}\oint_{S(V)} da\,\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{E}\cdot\mathbf{E}) \\
&= \oint_{S(V)} da\left[(\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{E})\mathbf{E}-\frac{1}{2}\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{E}\cdot\mathbf{E})\right],
\end{aligned}$$

onde $S(V)$ é a superfície fechada que constitui a fronteira da região V e $\hat{\mathbf{n}}$ é a normal externa a $S(V)$. De forma análoga, podemos calcular:

$$\int_V d^3r\left[-\mathbf{B}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{B})\right] = \int_V d^3r\left[\mathbf{B}\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{B}-\mathbf{B}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{B})\right],$$

já que não há monopolos magnéticos, isto é,

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{B} = 0,$$

e, portanto

$$\int_V d^3r\left[-\mathbf{B}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{B})\right] = \oint_{S(V)} da\left[(\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{B})\mathbf{B}-\frac{1}{2}\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{B}\cdot\mathbf{B})\right].$$

Agora podemos obter a integral volumétrica de $\rho\mathbf{E}+\mathbf{J}\times\mathbf{B}/c$, pois temos todos os termos levados em conta:

$$\begin{aligned}
\int_V d^3r\left[\rho\mathbf{E}+\frac{1}{c}\mathbf{J}\times\mathbf{B}\right] &= \frac{1}{4\pi}\int_V d^3r\left[\mathbf{E}\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{E}-\mathbf{E}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{E})\right] \\
&+ \frac{1}{4\pi}\int_V d^3r\left[-\mathbf{B}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{B})\right]-\frac{1}{4\pi c}\int_V d^3r\frac{\partial\mathbf{E}\times\mathbf{B}}{\partial t} \\
&= \frac{1}{4\pi}\oint_{S(V)} da\left[(\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{E})\mathbf{E}-\frac{1}{2}\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{E}\cdot\mathbf{E})\right] \\
&+ \frac{1}{4\pi}\oint_{S(V)} da\left[(\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{B})\mathbf{B}-\frac{1}{2}\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{B}\cdot\mathbf{B})\right] \\
&- \frac{1}{4\pi c}\frac{d}{dt}\int_V d^3r\mathbf{E}\times\mathbf{B},
\end{aligned}$$

já que

$$\int_V d^3r\frac{\partial\mathbf{E}\times\mathbf{B}}{\partial t} = \frac{d}{dt}\int_V d^3r\mathbf{E}\times\mathbf{B}.$$

Voltando à equação de balanço de momentum linear,

$$\frac{d\mathbf{P}_m}{dt} = \int_V d^3r \left(\rho\mathbf{E} + \frac{1}{c}\mathbf{J}\times\mathbf{B}\right),$$

encontramos, finalmente,

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{P}_m}{dt} &= \frac{1}{4\pi}\oint_{S(V)} da \left[(\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{E})\,\mathbf{E} + (\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{B})\,\mathbf{B} - \frac{1}{2}\hat{\mathbf{n}}\,(\mathbf{E}\cdot\mathbf{E}) - \frac{1}{2}\hat{\mathbf{n}}\,(\mathbf{B}\cdot\mathbf{B})\right] \\ &- \frac{d}{dt}\int_V d^3r \left(\frac{1}{4\pi c}\mathbf{E}\times\mathbf{B}\right),\end{aligned}$$

isto é,

$$\frac{d\mathbf{P}_m}{dt} + \frac{d}{dt}\int_V d^3r\,\mathbf{g} = \frac{1}{4\pi}\oint_{S(V)} da \left[(\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{E})\,\mathbf{E} + (\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{B})\,\mathbf{B} - \frac{1}{2}\hat{\mathbf{n}}\,(\mathbf{E}\cdot\mathbf{E}) - \frac{1}{2}\hat{\mathbf{n}}\,(\mathbf{B}\cdot\mathbf{B})\right],$$

onde

$$\mathbf{g} \equiv \frac{1}{4\pi c}\mathbf{E}\times\mathbf{B}$$

é a densidade de momentum linear do campo eletromagnético. Portanto, se definirmos o momentum linear do campo eletromagnético como

$$\mathbf{P}_c \equiv \int_V d^3r\,\mathbf{g},$$

então o balanço de momentum linear para o eletromagnetismo é dado por

$$\frac{d\left(\mathbf{P}_m + \mathbf{P}_c\right)}{dt} = \frac{1}{4\pi}\oint_{S(V)} da \left[(\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{E})\,\mathbf{E} + (\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{B})\,\mathbf{B} - \frac{1}{2}\hat{\mathbf{n}}\,(\mathbf{E}\cdot\mathbf{E}) - \frac{1}{2}\hat{\mathbf{n}}\,(\mathbf{B}\cdot\mathbf{B})\right],$$

que é conservado na região V se, e somente se,

$$\frac{1}{4\pi}\oint_{S(V)} da \left[(\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{E})\,\mathbf{E} + (\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{B})\,\mathbf{B} - \frac{1}{2}\hat{\mathbf{n}}\,(\mathbf{E}\cdot\mathbf{E}) - \frac{1}{2}\hat{\mathbf{n}}\,(\mathbf{B}\cdot\mathbf{B})\right] = 0.$$

Caso essa quantidade não seja nula, há transferência de momentum através da superfície da região V e, portanto, podemos interpretar essa quantidade como a integral da força por unidade de área transmitida através da superfície $S\,(V)$. Se tomarmos uma só componente desse integrando, temos

$$\begin{aligned}(\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{E})\,E_k + (\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{B})\,B_k - \frac{1}{2}n_k\,(\mathbf{E}\cdot\mathbf{E} + \mathbf{B}\cdot\mathbf{B}) &= \sum_{m=1}^{3} n_m\,(E_mE_k + B_mB_k) - \frac{1}{2}n_k\,(\mathbf{E}\cdot\mathbf{E} + \mathbf{B}\cdot\mathbf{B}) \\ &= \sum_{m=1}^{3} 4\pi T_{km}n_m,\end{aligned}$$

onde

$$T_{km} \equiv \frac{1}{4\pi}\left[E_k E_m + B_k B_m - \frac{1}{2}\delta_{km}\left(\mathbf{E}\cdot\mathbf{E} + \mathbf{B}\cdot\mathbf{B}\right)\right]$$

é o chamado tensor dos estresses de Maxwell. Com isso, o balanço de momentum linear pode também ser expresso como

$$\frac{d\left(\mathbf{P}_m + \mathbf{P}_c\right)_k}{dt} = \sum_{m=1}^{3} \oint_{S(V)} da\, T_{km} n_m.$$