A Condutividade Elétrica

No modelo de dispersão da luz em meios materiais de Drude-Lorentz, calculamos a susceptibilidade elétrica complexa,considerando a resposta dos n_k elétrons do tipo k por molécula, em um meio com N moléculas por unidade de volume, onde a constante de amortecimento para os elétrons do tipo k é γ_k e a frequência de ressonância para esse tipo é escrita ω_k, na presença de uma onda eletromagnética monocromática de frequência ω. O resultado escreve-se

$$\chi_c(\omega) = \sum_k \frac{N n_k e^2}{m\left(\omega_k^2 - \omega^2 - i\gamma_k \omega\right)},$$

onde a soma é sobre os diferentes tipos de elétrons em cada molécula. Agora, vamos supor que haja um certo número N_0 de elétrons livres por unidade de volume do meio material. Também vamos supor que esses elétrons livres estejam distribuídos uniformemente pelo material e, portanto, para cada molécula, haverá

$$n_0 = \frac{N_0}{N}$$

elétrons livres, já que N é o número de moléculas por unidade de volume. Dessa forma, para incluirmos esses elétrons livres no modelo, vamos modificar a susceptibilidade complexa acima de forma a termos

$$\begin{aligned}\chi_c'(\omega) &= \sum_k \frac{N n_k e^2}{m\left(\omega_k^2 - \omega^2 - i\gamma_k \omega\right)} + \frac{N n_0 e^2}{m\left(-\omega^2 - i\gamma_0 \omega\right)} \\ &= \chi_c(\omega) - \frac{N n_0 e^2}{m\omega\left(\omega + i\gamma_0\right)},\end{aligned}$$

onde, para elétrons livres,

$$\omega_0 = 0$$

e a constante de amortecimento é escrita como γ_0. Para um meio não magnético, isto é, com

$$\mu = 1,$$

a Lei de Ampère-Maxwell é escrita como

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\beta} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{J} + \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{D}}}{\partial t},$$

onde, segundo o modelo que estamos adotando, o campo deslocamento elétrico complexo é dado por

$$\boldsymbol{\mathcal{D}} = \boldsymbol{\epsilon} + 4\pi \boldsymbol{\mathcal{P}},$$

com

$$\boldsymbol{\mathcal{P}} = \chi_c'(\omega)\,\boldsymbol{\epsilon}.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{\beta} &= \frac{4\pi}{c}\mathbf{J}+\frac{1}{c}\left[1+4\pi\chi_c'(\omega)\right]\frac{\partial\boldsymbol{\epsilon}}{\partial t}\\
&= \frac{4\pi}{c}\mathbf{J}-i\frac{\omega}{c}\left[1+4\pi\chi_c(\omega)-\frac{4\pi N n_0 e^2}{m\omega(\omega+i\gamma_0)}\right]\boldsymbol{\epsilon}\\
&= \frac{4\pi}{c}\mathbf{J}+i\frac{\omega}{c}\frac{4\pi N n_0 e^2}{m\omega(\omega+i\gamma_0)}\boldsymbol{\epsilon}-i\frac{\omega}{c}\left[1+4\pi\chi_c(\omega)\right]\boldsymbol{\epsilon}\\
&= \frac{4\pi}{c}\left[\mathbf{J}+\frac{N n_0 e^2}{m(\gamma_0-i\omega)}\boldsymbol{\epsilon}\right]+\frac{1}{c}\left[1+4\pi\chi_c(\omega)\right]\frac{\partial\boldsymbol{\epsilon}}{\partial t}.
\end{aligned}$$

Concluímos, portanto, que quando há elétrons do material que podem se mover livremente, a densidade de corrente adquire uma contribuição proporcional ao campo elétrico, cuja constante de proporcionalidade é dada por

$$\sigma = \frac{N n_0 e^2}{m(\gamma_0-i\omega)}.$$

Esse tipo de material é chamado ôhmico e a densidade de corrente produzida pela presença do campo elétrico é dada pela Lei de Ohm:

$$\mathbf{J}_{\mathrm{Ohm}} = \sigma\boldsymbol{\epsilon}.$$

No modelo que estamos considerando, a condutividade elétrica, para frequências suficientemente baixas, fica

$$\sigma \approx \frac{N n_0 e^2}{m\gamma_0},$$

essencialmente real e, portanto, em fase com o campo elétrico. Para o cobre, por exemplo, com uma condutividade da ordem de $5.9\times10^{7}\Omega^{-1}\mathrm{m}^{-1}$ e 8×10^{28} átomos/m^3, obtemos $\gamma_0/n_0\approx 4\times10^{13}\mathrm{s}^{-1}$. Supondo apenas um elétron livre por molécula, essa pequena análise mostra que a condutividade pode ser considerada essencialmente real para frequências abaixo de cerca de $10^{11}\mathrm{s}^{-1}$ (microondas, por exemplo).