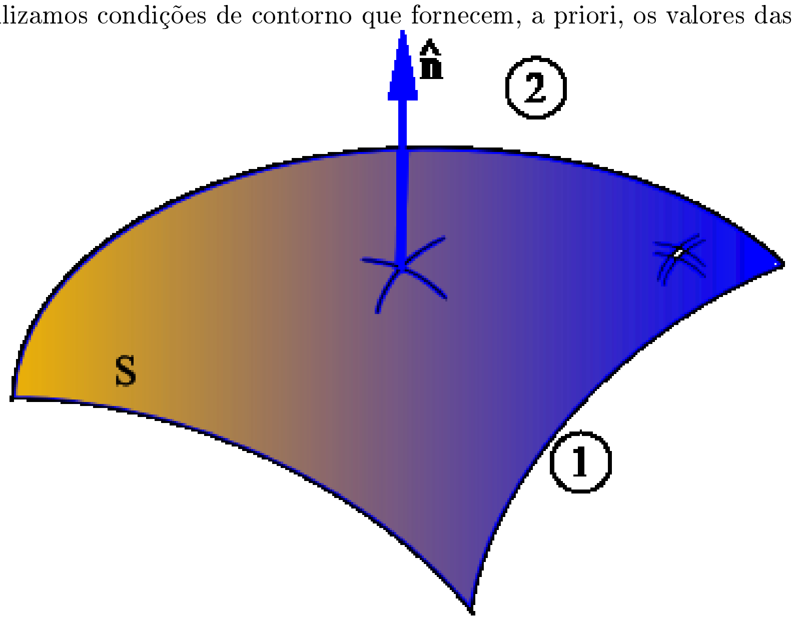
Condições de contorno para os campos

Quando dois materiais diferentes estão em contato, mesmo que lineares, homogêneos e isotrópicos, na região da interface entre eles pode haver descontinuidades dos campos, pois as susceptibilidades elétrica e magnética podem variar apreciavelmente de um material para outro. A interface entre os meios é representada por uma superfície singular, onde as descontinuidades ocorrem. Para calcularmos os campos na presença de uma interface utilizamos condições de contorno que fornecem, a priori, os valores das descontinuidades dos campos.



Das equações

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 4\pi\rho$$

e

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

segue que as condições de contorno para as componentes normais de **D** e **B** são as mesmas que para o caso estático, isto é,

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1)|_S = 4\pi\sigma$$

e

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1)|_S = 0,$$

onde $\hat{\mathbf{n}}$ é o versor que aponta do meio 1 para o meio 2 e S é a interface de separação entre os meios.

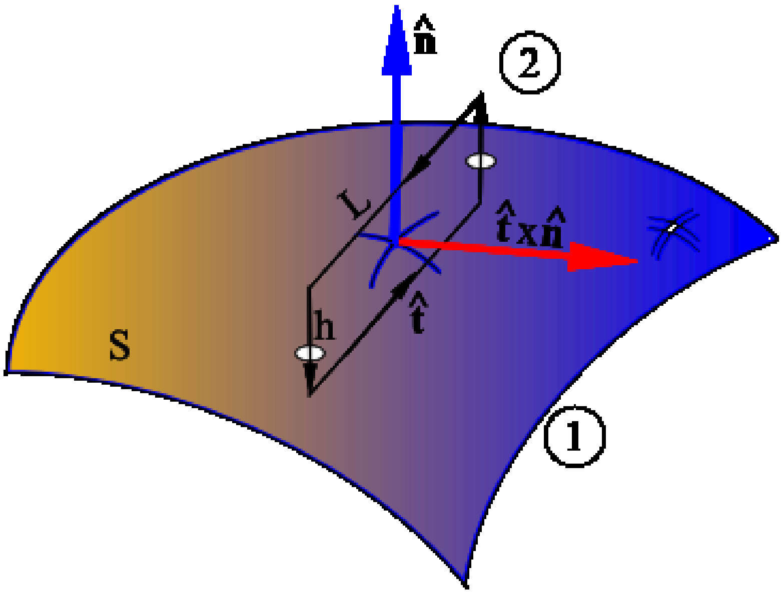
Para as equações

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

e

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{J} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

um pouco mais de cuidado é necessário com as derivadas parciais com relação ao tempo.



Por exemplo, para a Lei de Ampère-Maxwell,

$$\mathbf{\nabla} \times \mathbf{H} \;=\; \frac{4\pi}{c}\mathbf{J} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t},$$

consideramos um ponto sobre a interface S e fazemos uma circuitação plana e retangular, com seu plano contendo a normal à superfície no ponto considerado. Se $\hat{\mathbf{n}}$ é a normal, seja $\hat{\mathbf{t}}$ um versor perpendicular à normal no ponto considerado. Então, $\hat{\mathbf{t}}$ é tangente à superfície S. O vetor $\hat{\mathbf{t}} \times \hat{\mathbf{n}}$ é também um versor e é ortogonal a ambos os versores $\hat{\mathbf{t}}$ e $\hat{\mathbf{n}}$. Com esses três versores, construamos uma circuitação em torno do ponto considerado da interface S. Ao longo de $\hat{\mathbf{t}}$, na região 1, tracemos um lado do retângulo de comprimento L. Ao longo de $\hat{\mathbf{n}}$, atravessando a interface da região 1 para a região 2, tracemos outro lado do retângulo de comprimento h. O retângulo está completo e podemos considerar o Teorema de Stokes para o fluxo do campo intensidade magnética sobre a superfície do retângulo, considerando L e h infinitesimais:

$$\begin{aligned}
\int_{\text{ret}} da\ (\hat{\mathbf{t}} \times \hat{\mathbf{n}}) \cdot (\mathbf{\nabla} \times \mathbf{H}) &= \oint d\mathbf{r} \cdot \mathbf{H} \\
&= L\hat{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{H}_1 + \frac{h}{2}\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{H}_1 + \frac{h}{2}\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{H}_2 \\
&- L\hat{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{H}_2 - \frac{h}{2}\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{H}_2 - \frac{h}{2}\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{H}_1 \\
&= L\hat{\mathbf{t}} \cdot (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) \\
&= \int_{\text{ret}} da\ (\hat{\mathbf{t}} \times \hat{\mathbf{n}}) \cdot \left(\frac{4\pi}{c}\mathbf{J} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\right) \\
&= \frac{4\pi}{c} L\,(\hat{\mathbf{t}} \times \hat{\mathbf{n}}) \cdot \mathbf{j} + \frac{1}{c}\int_{\text{ret}} da\ (\hat{\mathbf{t}} \times \hat{\mathbf{n}}) \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\right),
\end{aligned}$$

onde $\mathbf{j}$ é a corrente livre superficial na interface S. A condição de contorno nesse caso dá

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{t}} \cdot (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2)\big|_S &= \frac{4\pi}{c}\,(\hat{\mathbf{t}} \times \hat{\mathbf{n}}) \cdot \mathbf{j} + \frac{1}{c}\int_{\text{ret}} \frac{da}{L}\ (\hat{\mathbf{t}} \times \hat{\mathbf{n}}) \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\right), \\
&= \frac{4\pi}{c}\hat{\mathbf{t}} \cdot (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{j}),
\end{aligned}$$

pois

$$\int_{\text{ret}} \frac{da}{L}\ (\hat{\mathbf{t}} \times \hat{\mathbf{n}}) \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\right) \;\to\; 0$$

quando

$$h \;\to\; 0.$$

Assim, a componente tangencial do campo intensidade magnética não é contínua quando $\mathbf{j} \neq \mathbf{0}$. No entanto, $\hat{\mathbf{t}}$ é arbitrário; vamos então reescrever essa condição de contorno em termos apenas da normal $\hat{\mathbf{n}}$. Como $\hat{\mathbf{t}}$ é arbitrário e tangente a S, então, $\left(\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2 - \frac{4\pi}{c}\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{j}\right)$ deve ser perpendicular a $\hat{\mathbf{t}}$, ou seja,

$$\left(\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2 - \frac{4\pi}{c}\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{j}\right) = \alpha\hat{\mathbf{n}} + \beta\left(\hat{\mathbf{t}} \times \hat{\mathbf{n}}\right).$$

Logo,

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{n}} \times \left(\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2 - \frac{4\pi}{c}\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{j}\right)\Big|_S &= \beta\hat{\mathbf{n}} \times \left(\hat{\mathbf{t}} \times \hat{\mathbf{n}}\right) \\ &= \beta\hat{\mathbf{t}}. \end{aligned}$$

Como $\hat{\mathbf{t}}$ é arbitrário e o membro esquerdo dessa equação não é arbitrário, segue que $\beta = 0$ e a condição de contorno fica

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{n}} \times \left(\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2\right)\big|_S &= \frac{4\pi}{c}\hat{\mathbf{n}} \times \left(\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{j}\right) \\ &= \frac{4\pi}{c}\hat{\mathbf{n}}\left(\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{j}\right) - \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}. \end{aligned}$$

Como $\mathbf{j}$ é tangente à interface, segue que

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{j} = 0$$

e, portanto,

$$\hat{\mathbf{n}} \times \left(\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1\right)\big|_S = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j},$$

como no caso estático. Analogamente, da Lei de Indução de Faraday segue a continuidade da componente tangencial de $\mathbf{E}$:

$$\hat{\mathbf{n}} \times \left(\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1\right)\big|_S = \mathbf{0}.$$